ES N° 2 **CORRECTION** **Juin 2014**

I) EXERCICE

1. $\forall x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto f(t)\cos(xt)$ et $t \mapsto f(t)\sin(xt)$ sont continues sur $[0\,;\,1]$, les fonctions F et G sont donc bien définies sur $\mathbb{R}$.

2. $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(-x) = \int_0^1 f(t)\cos(-xt)\,dt = \int_0^1 f(t)\cos(xt)\,dt = F(x)$, car la fonction cos est paire.

La fonction F est donc paire.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $G(-x) = \int_0^1 f(t)\sin(-xt)\,dt = \int_0^1 -f(t)\sin(xt)\,dt = -G(x)$, car la fonction sin est impaire, et par linéarité de l'intégrale. La fonction G est donc impaire.

3. **a)** $\forall x > 0, F(x) + iG(x) = \int_0^1 f(t)\big(\cos(xt) + i\sin(xt)\big)\,dt = \int_0^1 f(t)\mathrm{e}^{ixt}\,dt$, par linéarité de l'intégrale.

Une intégration par parties donne (en dérivant f et primitivant $t \mapsto e^{ixt}$ toutes deux de classe C^1 sur [0 ; 1]) :

$$\forall x > 0\ ,\ F(x) + iG(x) = \left[f(t)\frac{e^{ixt}}{ix} \right]_0^1 - \int_0^1 f'(t)\frac{\mathrm{e}^{ixt}}{ix}\,dt = \frac{f(1)\mathrm{e}^{ix} - f(0)}{ix} - \frac{1}{ix}\int_0^1 f'(t)\mathrm{e}^{ixt}\,dt\,.$$

b) f est de classe C^1 sur [0 ; 1], donc f et f' sont continues sur [0 ; 1], qui est un intervalle fermé borné. Elles y sont donc bornées (et atteignent leurs bornes).

c) $\forall x > 0$:

$$\left|F(x) + iG(x)\right| = \left| \frac{f(1)\mathrm{e}^{ix} - f(0)}{ix} - \frac{1}{ix}\int_0^1 f'(t)\mathrm{e}^{ixt}\,dt \right| \le \frac{1}{x}\left| f(1)\mathrm{e}^{ix} - f(0) - \int_0^1 f'(t)\mathrm{e}^{ixt}\,dt \right|$$

$$\le \frac{1}{x}\left(|f(1)| + |f(0)| + \int_0^1 |f'(t)|\,dt \right) \le \frac{2M + M'}{x}$$

d) Le théorème d'encadrement donne : $\lim\limits_{x \to +\infty} \big(F(x) + iG(x)\big) = 0$, et par suite :

$$\lim_{x \to +\infty} F(x) = \lim_{x \to +\infty} \mathrm{Re}\big(F(x) + iG(x)\big) = 0 \text{ et } \lim_{x \to +\infty} G(x) = \lim_{x \to +\infty} \mathrm{Im}\big(F(x) + iG(x)\big) = 0\,.$$

II) PROBLEME 1

Partie A

1. a) f est le quotient de deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$, la fonction du dénominateur ne s'annulant que pour 0. On en déduit que f est définie sur $\mathbb{R}^*$.

b) $sh(x) = x + \dfrac{x^3}{6} + o_0(x^4)$.

c) $f(x) = \dfrac{x\left(1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + o_0(x^3)\right)}{x\left(1 + \dfrac{x^2}{6} + o_0(x^3)\right)} = \left(1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + o_0(x^3)\right)\left(1 - \dfrac{x^2}{6} + o_0(x^3)\right)$

$f(x) = 1 + x + \dfrac{x^2}{3} + o_0(x^3)$

d) f admettant un développement limité à l'odre 3 en 0 de premier terme 1, elle est prolongeable par continuité en 0, avec $f(0) = 1$.

e) f admettant un développement limité à l'odre 3 en 0 de partie régulière : $1 + x + \dfrac{x^2}{3}$, elle est dérivable en 0, avec $f'(0) = 1$.

L'équation de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe $\mathcal{C}$ en 0 est : y = 1 + x.

De plus, $f(x) - (1 + x) = \dfrac{x^2}{3} + o_0(x^3)$ donc, au voisinage de 0, la courbe $\mathcal{C}$ se situe au dessus de $\mathcal{T}$.

2. a) u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x : par $u'(x) = 2e^{2x} - 2$.

Ainsi, la fonction u' est négative sur $]-\infty;0]$, et positive sur $[0;+\infty[$.

u est donc décroissante sur $]-\infty;0]$ et croissante sur $[0;+\infty[$; elle atteint son minimum en 0, où elle vaut $u(0) = 0$. La fonction u est donc positive sur $\mathbb{R}$.

b) On a déjà justifié que f est dérivable en 0. De plus, elle est le quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$ où le dénominateur ne s'annule pas. Ainsi, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$\forall x \in \mathbb{R}^* : f'(x) = \dfrac{u(x)}{2sh^2(x)}$, $f'(0) = 1$.

c) On déduit de ce qui précède que la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$.

d) $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{xe^x}{\dfrac{e^x}{2}}$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$;

$f(x) \underset{-\infty}{\sim} \dfrac{xe^x}{\dfrac{-e^{-x}}{2}}$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} -2xe^{2x} = 0$ (par croissances comparées).

x	$-\infty$ $\quad$ $+\infty$
f	$0 \nearrow +\infty$

Remarque : (démonstration de ce qui est admis dans le sujet)

$\forall x\in\mathbb{R}^*:\ f'(x)=\dfrac{u(x)}{2sh^2(x)}=\dfrac{2x^2+o_0(x^2)}{2x^2+o_0(x^2)}\underset{0}{\sim}1$ et $f'(0)=1$; la fonction f' est donc continue en 0.

Sur $\mathbb{R}^*$, f' est le quotient de deux fonctions dérivables, elle est donc dérivable et (après calculs !) :

$\forall x\in\mathbb{R}^*: f''(x)=\dfrac{e^{-x}\left(e^{2x}(x-1)+x+1\right)}{\mathrm{sh}^3(x)}$.

On note $\forall x\in\mathbb{R}: v(x)=e^{2x}(x-1)+x+1$; par produit et somme, la fonction v est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, et $\forall x\in\mathbb{R},\ v'(x)=2e^{2x}(x-1)+e^{2x}+1=e^{2x}(2x-1)+1$ et $v''(x)=4xe^{2x}$.

$\forall x\in[-1;0]:\ v''(x)\le 0$ donc v' est décroissante sur [-1 ; 0] ; comme $v'(0)=0$, on en déduit que v' est positive sur [-1 ; 0], et par suite que v est croissante sur [-1 ; 0] ; de plus $v(0)=0$, donc v est négative sur [-1 ; 0].

Enfin, comme $\forall x\in[-1;0[: f''(x)=\dfrac{e^{-x}v(x)}{\mathrm{sh}^3(x)}$, on obtient que f'' est positive sur [-1 ; 0[, donc que f' est croissante sur cet intervalle. Comme elle est de plus continue en 0, f' est croissante sur [-1 ; 0].

Partie B

1. a) h est la composée de la fonction f croissante sur $\mathbb{R}$, et d'une fonction affine croissante sur $\mathbb{R}$; elle est donc croissante sur $\mathbb{R}$. On en déduit que : $\forall x\in[-1;0],\ h(-1)\le h(x)\le h(0)$.

$h(0)=0$ et $h(-1)=\dfrac{1}{2}f(-1)-\dfrac{1}{2}\ge-\dfrac{1}{2}>-1$, car f est positive sur $\mathbb{R}$.

[-1 ; 0] est donc stable par h.

Une récurrence immédiate donne $\forall n\in\mathbb{N}, u_n\in[-1;0]$. Donc (u_n) est une suite négative.

b) La fonction h étant croissante, (u_n) est monotone.

c) (u_n) est une suite monotone bornée (dans [-1 ; 0]). Elle est donc convergente.

2. a) On a : $\forall x\in[-1;0]: h'(x)=\dfrac{1}{2}f'(x)$.

f' est positive et croissante sur [-1 ; 0]. On a donc : $\forall x\in[-1;0]: 0\le h'(x)\le\dfrac{1}{2}f'(0)=\dfrac{1}{2}$.

b) La fonction h est continue sur [-1 ; 0], dérivable sur]-1 ; 0[, et $\forall x\in[-1;0]: 0\le h'(x)\le\dfrac{1}{2}$;

donc d'après l'inégalité des accroissements finis on a : $\forall x\in[-1;0],\ |h(x)-h(0)|\le\dfrac{1}{2}|x|$.

En particulier (avec $x=u_n$), $\forall n\in\mathbb{N},\ |u_{n+1}|\le\dfrac{1}{2}|u_n|$.

Une récurrence immédiate donne : $\forall n\in\mathbb{N},\ |u_n|\le\dfrac{1}{2^n}$.

c) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{2^n}=0$; le théorème d'encadrement donne $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$.

d) On a montré que $\forall n\in\mathbb{N},\ -\dfrac{1}{2^n}\le u_n\le 0$.

Pour avoir $u_n\in\left]-10^{-5};0\right[$ il suffit que : $\dfrac{1}{2^n}\le 10^{-5}\Leftrightarrow n\ln 2\ge 5\ln 10\Leftrightarrow n\ge\dfrac{5\ln 10}{\ln 2}$.

On peut prendre $N=17$

III) PROBLEME 2

1. a) Le rang de f est égal au rang de sa matrice.
Les première et troisième colonnes de A sont égales, non proportionnelles à la deuxième.
On en déduit que le rang de A et donc de f est 2.

Im(f) = Vect $\left\{(0;1;0);\left(\frac{1}{4};\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right)\right\}$;

$$(x;y;z)\in \operatorname{Ker}(f) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{4}y=0 \\ x+\frac{1}{2}y+z=0 \\ \frac{1}{4}y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+z=0 \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow (x;y;z)=x(1;0;-1).$$

Ainsi, Ker(f) = Vect{(1 ; 0 ; -1)}

b) f n'est pas automorphisme de $\mathbb{R}^3$ car son noyau est n'est pas {0}.

c) $$(x;y;z)\in \operatorname{Ker}\left(f+\frac{1}{2}Id\right) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}x+\frac{1}{4}y=0 \\ x+y+z=0 \\ \frac{1}{4}y+\frac{1}{2}z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=0 \\ y=-2z \end{cases} \Leftrightarrow (x;y;z)=z(1;-2;1)$$

$\operatorname{Ker}\left(f+\frac{1}{2}Id\right)$ est donc la droite vectorielle Vect{(1 ; -2 ; 1)}.

2. a) $$\forall(\lambda_1;\lambda_2;\lambda_3)\in\mathbb{R}^3,\ \lambda_1 u+\lambda_2 v+\lambda_3 w=0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0 \\ -2\lambda_2+4\lambda_3=0 \\ -\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0.$$

La famille $\mathcal{B}$ est libre de cardinal 3, c'est donc une base de $\mathbb{R}^3$.

b) $f(u)$ = $0_{\mathbb{R}^3}$ (on avait trouvé $u\in$ Ker(f)) ; $f(v)$ = $-\frac{1}{2}v$ (on avait trouvé $v\in\operatorname{Ker}\left(f+\frac{1}{2}Id\right)$)
et $f(w) = w$ (par calcul).

c) On déduit de la question précédente que : $D=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. a) La matrice P recherchée est la matrice de passage de la base $\mathcal{C}$ à la base $\mathcal{B}$: $P=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

b) $P^{-1}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

On a pour $n \in \mathbb{N}$: $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f^n) = D^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{(-2)^n} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

d'où $A^n = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f^n) = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3\times(-2)^n}+\frac{1}{6} & \frac{1}{3\times(-2)^{n+1}}+\frac{1}{6} & \frac{1}{3\times(-2)^n}+\frac{1}{6} \\ \frac{1}{3\times(-2)^{n-1}}+\frac{2}{3} & \frac{1}{3\times(-2)^n}+\frac{2}{3} & \frac{1}{3\times(-2)^{n-1}}+\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3\times(-2)^n}+\frac{1}{6} & \frac{1}{3\times(-2)^{n+1}}+\frac{1}{6} & \frac{1}{3\times(-2)^n}+\frac{1}{6} \end{pmatrix}$

4. a) $C_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (car avant tout tirage il y a une seule boule blanche dans l'urne 1).

b) $X_n = 0$ signifie qu'à l'issue de la n-ième expérience, il y a deux boules noires dans U_1, et deux boules blanches dans U_2. On ne peut donc pas avoir aucune boule blanche dans U_1 après l'expérience suivante. On a donc : $P_{X_n=0}(X_{n+1}=0) = 0$;

$X_n = 1$ signifie qu'à l'issue de la n-ième expérience, il y a une boule blanche et une boule noire dans U_1, et de même dans U_2. Pour avoir aucune boule blanche dans U_1 après l'expérience suivante, on doit tirer une boule blanche dans U_1 **et** une boule noire dans U_2, les deux tirages étant **indépendants.** On a donc : $P_{X_n=1}(X_{n+1}=0) = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$;

$X_n = 2$ signifie qu'à l'issue de la n-ième expérience, il y a deux boules blanches dans U_1, et deux boules noires dans U_2. On ne peut donc pas avoir aucune boule blanche dans U_1 après l'expérience suivante. On a donc : $P_{X_n=2}(X_{n+1}=0) = 0$.

La formule des probabilités totales donne :

$$P(X_{n+1}=0) = P_{X_n=0}(X_{n+1}=0)\times P(X_n=0) + P_{X_n=1}(X_{n+1}=0)\times P(X_n=1) + P_{X_n=2}(X_{n+1}=0)\times P(X_n=2)$$
$$= \frac{1}{4}P(X_n=1)$$

.

Si $X_n = 0$, on ne peut pas avoir 2 boules blanches dans U_1 après l'expérience suivante.
On a donc : $P_{X_n=0}(X_{n+1}=2) = 0$;

Si $X_n = 1$, pour avoir deux boules blanches dans U_1 après l'expérience suivante, on doit tirer une boule noire dans U_1 **et** une boule blanche dans U_2, les deux tirages étant **indépendants** .
On a donc : $P_{X_n=1}(X_{n+1}=2) = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$;

Si $X_n = 2$, on ne peut pas avoir deux boules blanches dans U_1 après l'expérience suivante.
On a donc : $P_{X_n=2}(X_{n+1}=2) = 0$.

La formule des probabilités totales donne :

$$P(X_{n+1}=2)=P_{X_n=0}(X_{n+1}=2)\times P(X_n=0)+P_{X_n=1}(X_{n+1}=2)\times P(X_n=1)+P_{X_n=2}(X_{n+1}=2)\times P(X_n=2)$$
$$=\frac{1}{4}P(X_n=1)$$

Si $X_n = 0$, on aura nécessairement une boule blanche dans U_1 après l'expérience suivante.
On a donc : $P_{X_n=0}(X_{n+1}=1)=1$;

Si $X_n = 1$, pour avoir une boule blanche dans U_1 après l'expérience suivante, on doit tirer ***soit*** une boule noire dans chaque urne, ***soit*** une boule blanche dans chaque urne, les deux tirages étant **indépendants**, les deux situations étant ***incompatibles*** .
On a donc : $P_{X_n=1}(X_{n+1}=1)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$;

Si $X_n = 2$, on aura forcément une boule blanche dans U_1 après l'expérience suivante.
On a donc : $P_{X_n=2}(X_{n+1}=1)=1$.

La formule des probabilités totales donne :

$$P(X_{n+1}=1)=P_{X_n=0}(X_{n+1}=1)\times P(X_n=0)+P_{X_n=1}(X_{n+1}=1)\times P(X_n=1)+P_{X_n=2}(X_{n+1}=1)\times P(X_n=2)$$
$$=P(X_n=0)+\frac{1}{2}P(X_n=1)+P(X_n=2)$$

c) Les résultats précédents donnent :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ C_{n+1}=\begin{pmatrix}P(X_{n+1}=0)\\P(X_{n+1}=1)\\P(X_{n+1}=2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{4}P(X_n=1)\\P(X_n=0)+\frac{1}{2}P(X_n=1)+P(X_n=2)\\\frac{1}{4}P(X_n=1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{4}&0\\1&\frac{1}{2}&1\\0&\frac{1}{4}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}P(X_n=0)\\P(X_n=1)\\P(X_n=2)\end{pmatrix}=AC_n$$

d) Une récurrence immédiate donne : $\forall n\in\mathbb{N},\ C_n=A^nC_0$.

e) L'étude précédente donne :

$$\begin{pmatrix}P(X_n=0)\\P(X_n=1)\\P(X_n=2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3\times(-2)^n}+\frac{1}{6}&\frac{1}{3\times(-2)^{n+1}}+\frac{1}{6}&\frac{1}{3\times(-2)^n}+\frac{1}{6}\\\frac{1}{3\times(-2)^{n-1}}+\frac{2}{3}&\frac{1}{3\times(-2)^n}+\frac{2}{3}&\frac{1}{3\times(-2)^{n-1}}+\frac{2}{3}\\\frac{1}{3\times(-2)^n}+\frac{1}{6}&\frac{1}{3\times(-2)^{n+1}}+\frac{1}{6}&\frac{1}{3\times(-2)^n}+\frac{1}{6}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3\times(-2)^{n+1}}+\frac{1}{6}\\\frac{1}{3\times(-2)^n}+\frac{2}{3}\\\frac{1}{3\times(-2)^{n+1}}+\frac{1}{6}\end{pmatrix}$$

On a donc : $\lim_{n\to+\infty}P(X_n=0)=\frac{1}{6};\ \lim_{n\to+\infty}P(X_n=1)=\frac{2}{3};\ \lim_{n\to+\infty}P(X_n=2)=\frac{1}{6}$.