EXERCICE I

On note $U=\{z\in\mathbb{C}\,/\,|z|=1\}=\{e^{i\theta}\,/\,\theta\in\,]-\pi;\pi]\}$.

Soit $(a;b;c;d)\in\mathbb{C}^4$ tel que $ad-bc\neq 0$. On appelle *homographie* définie par la relation $h(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$ l'application h à valeurs dans $\mathbb{C}$ qui à tous $z\in\mathbb{C}$ tels que $cz+d\neq 0$ associe $\dfrac{az+b}{cz+d}$.

Première partie : Etude d'un exemple.

Soit g l'homographie définie par $g(z)=\dfrac{z-i}{z+i}$.

1. Montrer que g établit une bijection de $\mathbb{C}\setminus\{-i\}$ sur un ensemble D à déterminer.

2. a) Montrer que $\forall z\in\mathbb{R},\, g(z)\in U$.

b) Montrer que $\forall e^{i\theta}\in U\cap D,\ \left(g(z)=e^{i\theta}\right)\Leftrightarrow\left(z=-\dfrac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\right)$.

3. a) Montrer que $\forall e^{i\theta}\in U\setminus\left\{e^{-i\frac{\pi}{2}}\right\},\ g\left(e^{i\theta}\right)=i\tan\left(\dfrac{\theta}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right)$.

b) En déduire l'image de $U\setminus\left\{e^{-i\frac{\pi}{2}}\right\}$ par g.

c) Montrer géométriquement que les antécédents des imaginaires purs sont dans $U\setminus\left\{e^{-i\frac{\pi}{2}}\right\}$.

Deuxième partie : Homographies conservant U

L'objectif est de déterminer l'ensemble des homographies h telles que :

$$\forall z\in U,\ h(z)\in U.$$

1. Soit $\theta\in\,]-\pi;\pi]$ et h l'homographie définie par $h(z)=\dfrac{e^{i\theta}}{z}$. Montrer que $\forall z\in U,\ h(z)\in U$.

2. Soient $\alpha\in\mathbb{C}$ tel que $\alpha\notin U$, $\theta\in\,]-\pi;\pi]$ et h l'homographie définie par $h(z)=e^{i\theta}\dfrac{z+\alpha}{\overline{\alpha}z+1}$.

a) Montrer que h est bien une homographie, et que h est définie sur U.

b) Montrer que $\forall z\in U,\ h(z)\in U$.

Réciproquement, nous allons démontrer que seules les homographies h étudiées dans les questions **1.** et **2.** sont telles que : $\forall z\in U,\ h(z)\in U$.

T.S.V.P.

3. a) Montrer que $\forall (a;b)\in \mathbb{C}^2, |a+b|^2 = |a|^2+|b|^2+2\,\mathrm{Re}\left(\overline{a}\,b\right)$.

b) Soit $(a;b)\in \mathbb{C}^2$, montrer que : $\left(\forall\theta\in \left]-\pi;\pi\right],\ a+2\,\mathrm{Re}\left(b\,\mathrm{e}^{-i\theta}\right)=0\right)\Rightarrow\left((a=0)\wedge(b=0)\right)$

4. Soient $(a;b;c;d)\in \mathbb{C}^4$ tel que $ad-bc\neq 0$, et h l'homographie définie sur U par $h(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$ telle que $\forall z\in U,\ h(z)\in U$.

a) Montrer que $\forall\theta\in \left]-\pi;\pi\right],\ |a|^2+|b|^2+2\,\mathrm{Re}\left(\overline{a}\,b\,\mathrm{e}^{-i\theta}\right)=|c|^2+|d|^2+2\,\mathrm{Re}\left(\overline{c}\,d\,\mathrm{e}^{-i\theta}\right)$.

b) En déduire que $|a|^2+|b|^2=|c|^2+|d|^2$ et $\overline{a}\,b=\overline{c}\,d$.

c) Si $a = 0$: montrer que h est du type étudié à la question **1**.

d) Si $a\neq 0$: montrer que $\left(|a|^2-|c|^2\right)\left(|a|^2-|d|^2\right)=0$.

e) Montrer que le cas $|a|^2=|c|^2$ est impossible de par la condition $ad-bc\neq 0$.

f) Montrer que le cas $|a|^2=|d|^2$ conduit à une homographie du type étudié à la question **2**.

EXERCICE II

Soit $A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ 6 & -2 & -4\\ -4 & 1 & 3\end{pmatrix}$.

1. Montrer que : $A^3 = 6A - A^2$.

2. Montrer qu'il existe deux suites réelles $(a_n)_{n\geq 2}$ et $(b_n)_{n\geq 2}$ telles que : $\forall n\geq 2, A^n = a_n A^2 + b_n A$, et établir des relations de récurrence vérifiées par les suites $(a_n)_{n\geq 2}$ et $(b_n)_{n\geq 2}$.

3. a) Montrer que $\forall n\geq 2,\ a_{n+2}=-a_{n+1}+6a_n$:

b) En déduire les formes explicites des suites $(a_n)_{n\geq 2}$ et $(b_n)_{n\geq 2}$ pour tout $n\geq 2$.

EXERCICE III

Dans le plan complexe, on considère trois points non alignés A, B et C d'affixes a, b et c respectivement.

Montrer qu'il existe un unique triangle dont les côtés ont pour milieux A, B et C, et préciser les affixes de ses sommets.

NB : toute trace de recherche sera prise en compte dans la notation.

Barème envisagé : 12 points - 5 points- 3 points