EXERCICE I

Première partie :

1. Soit $(z_0;z_1)\in\mathbb{C}^2$, avec $z_0\neq -i$; $g(z_0)=z_1 \Leftrightarrow \dfrac{z_0-i}{z_0+i}=z_1 \Leftrightarrow z_0(1-z_1)=z_1 i+i$.

Ainsi, $\forall z_1\in\mathbb{C}\setminus\{1\},\exists! z_0\in\mathbb{C}\setminus\{-i\}, g(z_0)=z_1$. (Il s'agit de $z_0=\dfrac{z_1 i+i}{1-z_1}$.)

On en déduit que g établit une bijection entre $\mathbb{C}\setminus\{-i\}$ et $\mathbb{C}\setminus\{1\}$.

2. a) Soit $z\in\mathbb{R}$; $|g(z)|=\dfrac{|z-i|}{|z+i|}=\dfrac{\sqrt{z^2+1}}{\sqrt{z^2+1}}=1$, donc $g(z)\in U$.

b) Soit $e^{i\theta}\in U\cap D$, d'après la question **1.**, on a :

$$\left(g(z)=e^{i\theta}\right)\Leftrightarrow\left(z \underset{e^{i\theta}\in D}{=} \frac{ie^{i\theta}+i}{1-e^{i\theta}}=\frac{ie^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\frac{\theta}{2}}+e^{-i\frac{\theta}{2}}\right)}{e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}}-e^{i\frac{\theta}{2}}\right)}=\frac{2i\cos\frac{\theta}{2}}{-2i\sin\frac{\theta}{2}}=-\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\right).$$

3. a) Soit $e^{i\theta}\in U\setminus\left\{e^{-i\frac{\pi}{2}}\right\}$, on a :

$$g\left(e^{i\theta}\right)=\frac{e^{i\theta}-i}{e^{i\theta}+i}=\frac{e^{i\theta}-e^{i\frac{\pi}{2}}}{e^{i\theta}+e^{i\frac{\pi}{2}}}=\frac{e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}\left(e^{i\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}-e^{-i\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}\right)}{e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}\left(e^{i\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}+e^{-i\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}\right)}=\frac{2i\sin\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}{2\cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}=i\tan\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$$

b) Lorsque θ décrit $\left]-\pi;-\frac{\pi}{2}\right[\cup\left]-\frac{\pi}{2};\pi\right]$, $\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}$ décrit $\left]-\frac{3\pi}{4};-\frac{\pi}{2}\right[\cup\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{4}\right]$, et $\tan\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$ décrit $\mathbb{R}$. On en déduit que l'image de $U\setminus\left\{e^{-i\frac{\pi}{2}}\right\}$ par g est $i\mathbb{R}$ (l'ensemble des imaginaires purs).

c) On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé direct. On considère les points A et B d'affixes i et $-i$ respectivement, et M un point d'affixe $z\in\mathbb{C}\setminus\{-i\}$ (donc différent du point B).

On a : $g(z)=\dfrac{z_{\overrightarrow{AM}}}{z_{\overrightarrow{BM}}}$ (notations évidentes). Ainsi, $g(z)$ est un imaginaire pur si et seulement si M est confondu avec A, ou $\arg\left(\dfrac{z_{\overrightarrow{AM}}}{z_{\overrightarrow{BM}}}\right)=\dfrac{\pi}{2}[\pi]$, ce qui équivaut à $\left(\overrightarrow{BM};\overrightarrow{AM}\right)=\dfrac{\pi}{2}[\pi]$.

On en déduit que les antécédents des imaginaires purs par g sont les affixes des points du cercle de diamètre $[AB]$ privé de B, ils sont donc dans $U\setminus\left\{e^{-i\frac{\pi}{2}}\right\}$.

Deuxième partie :

1. Soit $z\in U$, $\left|h(z)\right|=\left|\dfrac{e^{i\theta}}{z}\right|=\dfrac{1}{|z|}=1$ donc $\forall z\in U,\ h(z)\in U$.

2. a) $e^{i\theta}\left(1-\alpha\overline{\alpha}\right)\neq 0$ car $\alpha\notin U\Leftrightarrow \alpha\overline{\alpha}\neq 1$. On en déduit que *h* est bien une homographie.

De plus, si $\alpha=0$, *h* est définie sur U ; sinon, $\overline{\alpha}z+1=0\Leftrightarrow z=\dfrac{-1}{\overline{\alpha}}\notin U$. Donc *h* est définie sur *U*.

b) Soit $z\in U$, $\left|h(z)\right|^2=\left(\dfrac{z+\alpha}{\overline{\alpha}z+1}\right)\left(\dfrac{\overline{z}+\overline{\alpha}}{\alpha\overline{z}+1}\right)=\dfrac{|z|^2+\alpha\overline{z}+\overline{\alpha}z+|\alpha|^2}{|z\alpha|^2+\alpha\overline{z}+\overline{\alpha}z+1}=\dfrac{1+\alpha\overline{z}+\overline{\alpha}z+|\alpha|^2}{|\alpha|^2+\alpha\overline{z}+\overline{\alpha}z+1}=1$ donc $h(z)\in U$.

3. a) $\forall(a;b)\in\mathbb{C}^2, |a+b|^2=(a+b)\left(\overline{a}+\overline{b}\right)=a\overline{a}+a\overline{b}+b\overline{a}+b\overline{b}=|a|^2+|b|^2+2\,\mathrm{Re}\left(\overline{a}\,b\right)$.

b**)** Soit $(a;b)\in\mathbb{C}^2$. On suppose que $\forall\theta\in\left]-\pi;\pi\right],\ a+2\,\mathrm{Re}\left(b\,e^{-i\theta}\right)=0$.

Ainsi $\forall\theta\in\left]-\pi;\pi\right]$: Im(*a*) = 0 et $\mathrm{Re}(a)+2\,\mathrm{Re}(b)\cos\theta+2\,\mathrm{Im}(b)\sin\theta=0$.

Pour $\theta=\dfrac{\pi}{2}$, on a : Re(*a*) + 2 Im(*b*) = 0 ; pour $\theta=-\dfrac{\pi}{2}$, on a : Re(*a*) – 2 Im(*b*) = 0.

On en déduit que Re(*a*) = 0 et Im(*b*) = 0 ; de plus, comme Im(*a*) = 0, on a *a* = 0.

Enfin, pour θ =0, on a : Re(*b*) = 0. Finalement, on a : *a* = *b* = 0.

4. a) $\forall z\in U,\ h(z)\in U$ donc : $\forall\theta\in\left]-\pi;\pi\right],\ \left|h\left(e^{i\theta}\right)\right|^2=1$

$$\Leftrightarrow \forall\theta\in\left]-\pi;\pi\right],\left|\frac{ae^{i\theta}+b}{ce^{i\theta}+d}\right|^2=1\Leftrightarrow \forall\theta\in\left]-\pi;\pi\right],\left|ae^{i\theta}+b\right|^2=\left|ce^{i\theta}+d\right|$$

$$\underset{3.a)}{\Leftrightarrow}\forall\theta\in\left]-\pi;\pi\right],|a|^2+|b|^2+2\,\mathrm{Re}\left(\overline{a}\,b\,e^{-i\theta}\right)=|c|^2+|d|^2+2\,\mathrm{Re}\left(\overline{c}\,d\,e^{-i\theta}\right)$$

b) D'après le résultat précédent, on a :

$$\forall\theta\in\left]-\pi;\pi\right],|a|^2+|b|^2+2\,\mathrm{Re}\left(\overline{a}\,b\,e^{-i\theta}\right)=|c|^2+|d|^2+2\,\mathrm{Re}\left(\overline{c}\,d\,e^{-i\theta}\right)$$

$$\Leftrightarrow \forall\theta\in\left]-\pi;\pi\right],|a|^2+|b|^2-\left(|c|^2+|d|^2\right)+2\,\mathrm{Re}\left(\left(\overline{a}b-\overline{c}\,d\right)e^{-i\theta}\right)=0\underset{3.b)}{\Rightarrow}\left(|a|^2+|b|^2=|c|^2+|d|^2\right)\wedge\left(\overline{a}b=\overline{c}\,d\right)$$

c) Si *a* = 0 : $h(z)=\dfrac{b}{cz+d}$; avec, d'après la question précédente : $\left(|b|^2=|c|^2+|d|^2\right)\wedge\left(\overline{c}\,d=0\right)$.

Or $ad-bc\neq 0\Rightarrow c\neq 0$; on a donc *d* = 0 et $|b|^2=|c|^2$. Ainsi, $\exists\theta\in\left]-\pi;\pi\right],b=e^{i\theta}c$, d'où : $h(z)=\dfrac{e^{i\theta}}{z}$.

d) $\left(|a|^2-|c|^2\right)\left(|a|^2-|d|^2\right)=|a|^2\left(|a|^2-|d|^2-|c|^2\right)+|c|^2|d|^2\underset{|a|^2+|b|^2=|c|^2+|d|^2}{=}-|a|^2|b|^2+|c|^2|d|^2\underset{\overline{a}b=\overline{c}d}{=}0$

e) Si $|a|^2=|c|^2$ alors $a\overline{a}=c\overline{c}$ donc $a\overline{a}b=c\overline{c}b$. Or, $\overline{a}\,b=\overline{c}\,d$ donc $a\overline{c}d=c\overline{c}b$ ce qui donne $\overline{c}\left(ad-cb\right)=0$; comme $ad-bc\neq 0$, on en déduit que *c* = 0 et par suite, *a* = 0 ce qui est contraire à l'hypothèse $a\neq 0$.

f) Si $|a|=|d|\neq 0$: $h(z)=\dfrac{a\left(z+b/a\right)}{d\left(zc/d+1\right)}$, avec $\left|\dfrac{a}{d}\right|=1$ et $\overline{\left(\dfrac{b}{a}\right)}\underset{\overline{a}b=\overline{c}d}{=}\dfrac{c\overline{d}}{a\overline{a}}\underset{|a|^2=|d|^2}{=}\dfrac{c\overline{d}}{d\overline{d}}=\dfrac{c}{d}$;

de plus, $\left|\dfrac{b}{a}\right|=\left|\dfrac{c}{d}\right|=1\Leftrightarrow\left(|b|=|a|\right)\wedge\left(|c|=|d|\right)$, et comme $|a|=|d|$, on a $|a|=|c|$ ce qui est exclu d'après la question précédente. Finalement, en posant $\dfrac{a}{d}=e^{i\theta}$ $\left(\theta\in\left]-\pi;\pi\right]\right)$ et $\alpha=\dfrac{b}{a}=\overline{\left(\dfrac{c}{d}\right)}\notin U$, on retrouve une homographie du type étudié à la question **2**.

EXERCICE II

1. $A^2 = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ -8 & 6 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ et $A^3 = \begin{pmatrix} -18 & 9 & 9 \\ 44 & -18 & -26 \\ -26 & 9 & 17 \end{pmatrix}$ d'où : $A^3 = 6A - A^2$.

2. Construisons par récurrence deux suites réelles $(a_n)_{n\geq 2}$ et $(b_n)_{n\geq 2}$ telles que :

$\forall n \geq 2, A^n = a_n A^2 + b_n A$:

$A^2 = A^2 + 0$, on note $a_2 = 1$ et $b_2 = 0$.

Soit $n \geq 2$, on suppose qu'il existe $(a_k)_{k\in[\![2;n]\!]}$ et $(b_k)_{k\in[\![2;n]\!]}$ deux familles de réels tels que :

$\forall k \in [\![2;n]\!]$: $A^k = a_k A^2 + b_k A$.

On a : $A^{n+1} = A\left(a_n A^2 + b_n A\right) = a_n\left(6A - A^2\right) + b_n A^2 = \left(b_n - a_n\right)A^2 + 6a_n A$;

Ainsi, en posant $a_{n+1} = b_n - a_n$ et $b_{n+1} = 6a_n$, on a : $A^{n+1} = a_{n+1}A^2 + b_n A$.

On a construit ainsi par récurrence les suites $(a_n)_{n\geq 2}$ et $(b_n)_{n\geq 2}$ telles que : $\forall n \geq 2, A^n = a_n A^2 + b_n A$.

3. a) Soit $n \geq 2$; d'après la question précédente, on a: $a_{n+2} = b_{n+1} - a_{n+1} = 6a_n - a_{n+1}$.

b) On déduit de la question précédente que la suite $(a_n)_{n\geq 2}$ est une suite récurrente linéaire du second ordre d'équation caractéristique $r^2 + r - 6 = 0$, admettant deux solutions : 2 et -3.

Sachant que : $a_2 = 1$; $a_3 = -1$, on obtient : $\forall n \geq 2,\ a_n = \frac{1}{5}\times 2^{n-1} - \frac{1}{5}\times(-3)^{n-1}$.

Comme $\forall n \geq 2$, $b_n = a_{n+1} + a_n$, on a : $\forall n \geq 2, b_n = \frac{3}{5}\times 2^{n-1} + \frac{2}{5}\times(-3)^{n-1}$.

EXERCICE III

Si un tel triangle existe, notons M, N, et P ses sommets tels que A soit le milieu de $[MN]$, B soit le milieu de $[MP]$, et C soit le milieu de $[NP]$. Notons x, y et z les affixes de M, N et P respectivement.

On a : $\begin{cases} x + y = 2a \\ x + z = 2b \\ y + z = 2c \end{cases}$, ce qui équivaut à : $\begin{cases} x = a + b - c \\ y = a - b + c \\ z = -a + b + c \end{cases}$.

Vérifions que les points d'affixes x, y et z ainsi définis ne sont pas alignés :

Les points A, B et C n'étant pas alignés, a, b et c sont distincts deux à deux.

Si $x = y$, alors $b = c$ ce qui est exlcu.

Dès lors, les points M¸N et P sont alignés si, et seulement si $\frac{x-z}{x-y} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{2a-2c}{2b-2c} \in \mathbb{R}$ ce qui est exclu

car A, B, et C ne sont pas alignés.

Ainsi, il existe un unique triangle satisfaisant à la condition posée.