EXERCICE I

Soient α un réel fixé, et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par :

$$u_0 = 1, u_1 = \alpha \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = \alpha u_{n+1} + (1-\alpha) u_n$$

1. Calculer u_2, u_3 et donner une expression de u_n ne dépendant que de n (et α).

2. On suppose que $\alpha > 1$ et $\alpha \neq 2$. On pose alors $\alpha = 1 + \mathrm{e}^{2t}$, avec $t \neq 0$.

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \mathrm{e}^{nt} \dfrac{\mathrm{sh}((n+1)t)}{\mathrm{sh}(t)}$.

EXERCICE II

On souhaite déterminer les solutions réelles sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle :

$$(E) : \left(1 + x^2\right) y' = 1 + 3xy$$

1. Déterminer une solution particulière de (E) sous la forme d'une fonction polynomiale de degré 3.

2. Résoudre alors (E).

EXERCICE III

On pose : $I = \displaystyle\int_0^\pi \frac{t}{2+\sin t}\,dt$; et $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^x \frac{1}{2+\sin t}\,dt$.

1. a) Justifier que I est bien définie.

b) Justifier que F est dérivable sur $\mathbb{R}$, et en déduire que $F(\pi) = \lim\limits_{x\to\pi} F(x)$.

2. Dans l'intégrale I, à l'aide du changement de variable $u = \pi - t$ (que l'on justifiera), montrer que l'on a la relation : $I = \dfrac{\pi}{2} F(\pi)$.

3. a) Calculer, pour $a \in \mathbb{R}$: $\displaystyle\int_0^a \frac{1}{1+\theta+\theta^2}\,d\theta$.

b) Montrer que $\forall t \in \left]-\pi;\pi\right[,\ \sin t = \dfrac{2\tan\frac{t}{2}}{1+\tan^2\frac{t}{2}}$.

c) Pour $x \in \left]-\pi;\pi\right[$, calculer $F(x)$ à l'aide du changement de variable $\theta = \tan\dfrac{t}{2}$ (que l'on justifiera).

4. En déduire $F(\pi)$, puis I.

T.S.V.P.

EXERCICE IV

On considère, sur $\mathbb{R}$, l'équation différentielle du premier ordre suivante :

$$(E) : \; y'(x) - |y(x)| = 2\,\mathrm{e}^{-x}$$

On notera que (E) n'est pas linéaire.

On considère, sur $\mathbb{R}$, les équations différentielles linéaires du premier ordre suivantes :

$$(E_+) : \; y'(x) - y(x) = 2\,\mathrm{e}^{-x}$$

$$(E_-) : \; y'(x) + y(x) = 2\,\mathrm{e}^{-x}$$

1. a) Résoudre (E_+) sur $\mathbb{R}$.

b) Résoudre (E_-) sur $\mathbb{R}$.

2. Dans la suite, f désigne une solution de (E) sur $\mathbb{R}$; c'est-à-dire :

$$f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}, \text{ et } \forall x \in \mathbb{R},\; f'(x) - |f(x)| = 2\,\mathrm{e}^{-x}$$

a) Montrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que f n'est pas strictement positive sur $\mathbb{R}$.

c) Montrer que f n'est pas strictement négative sur $\mathbb{R}$.

d) En déduire que f s'annule une et une seule fois sur $\mathbb{R}$ en un réel que l'on notera α.

e) Montrer que : $f : x \to \begin{cases} 2(x-\alpha)\mathrm{e}^{-x} & \text{si } x \leq \alpha \\ \left(\mathrm{e}^{2(x-\alpha)} - 1\right)\mathrm{e}^{-x} & \text{si } x \geq \alpha \end{cases}$

Barème envisagé : 4 points - 3 points - 7 points - 6 points