EXERCICE I

1. $u_2=\alpha^2-\alpha+1;\ u_3=\alpha^3-2\alpha^2+2\alpha$.

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique : $r^2-\alpha r+\alpha-1=0$.

Son discriminant est $\Delta=(\alpha-2)^2$, donc deux cas se dégagent :

- ✓ Si $\alpha=2$, alors $\Delta=0$ et l'équation caractéristique admet une solution unique $r_0=1$.

Ainsi, $\exists(\lambda;\mu)\in\mathbb{R}^2,\forall n\in\mathbb{N},u_n=(\lambda n+\mu)r_0^n$.

Comme $u_0=1$ et $u_1=\alpha=2$, on obtient $\lambda=\mu=1$, et enfin : $\forall n\in\mathbb{N},u_n=n+1$.

- ✓ Si $\alpha\neq 2$, alors $\Delta>0$ et l'équation caractéristique admet deux solutions distinctes :

$r_1=\dfrac{\alpha+\alpha-2}{2}=\alpha-1$ et $r_2=\dfrac{\alpha-\alpha+2}{2}=1$ (qui était solution évidente…).

Ainsi, $\exists(\lambda;\mu)\in\mathbb{R}^2,\forall n\in\mathbb{N},u_n=\lambda r_1^n+\mu r_2^n=\lambda(\alpha-1)^n+\mu$.

Comme $u_0=1$ et $u_1=\alpha$, on obtient $\lambda=\dfrac{\alpha-1}{\alpha-2}$, $\mu=\dfrac{1}{2-\alpha}$, et enfin : $\forall n\in\mathbb{N},u_n=\dfrac{(\alpha-1)^{n+1}}{\alpha-2}+\dfrac{1}{2-\alpha}$.

2. $\forall n\in\mathbb{N},u_n=\dfrac{(\alpha-1)^{n+1}}{\alpha-2}+\dfrac{1}{2-\alpha}=\dfrac{e^{2t(n+1)}-1}{e^{2t}-1}=\dfrac{e^{t(n+1)}\left(e^{t(n+1)}-e^{-t(n+1)}\right)}{e^t\left(e^t-e^{-t}\right)}=e^{nt}\,\dfrac{\operatorname{sh}((n+1)t)}{\operatorname{sh}(t)}$.

EXERCICE II

1. $x\mapsto\dfrac{2}{3}x^3+x$ est une solution particulière de (*E*) (on procède par identification).

2. Résolution de l'équation homogène : $y'-\dfrac{3x}{1+x^2}y=0$ (*H*)

Sur $\mathbb{R}$, $\displaystyle\int\frac{3x}{1+x^2}\,dx=\frac{3}{2}\ln\left(1+x^2\right)+k,\ k\in\mathbb{R}$ donc l'ensemble des solutions de (*H*) est :

$S_H=\left\{x\mapsto\lambda\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}},\ \lambda\in\mathbb{R}\right\}$ et, en utilisant la question **1**, l'ensemble des solutions de (*E*) est :

$S_E=\left\{x\mapsto\dfrac{2}{3}x^3+x+\lambda\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}},\ \lambda\in\mathbb{R}\right\}$.

EXERCICE III

1. a) $t\mapsto\dfrac{t}{2+\sin t}$ est continue sur $\mathbb{R}$, elle y admet donc de primitives, et *I* est bien définie.

b) $t\mapsto\dfrac{t}{2+\sin t}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc, d'après le théorème fondamental d'intégration, *F* est dérivable sur $\mathbb{R}$.

De plus, *F* étant dérivable sur $\mathbb{R}$ elle y est continue et, en particulier, *F* est continue en π d'où :

$F(\pi)=\lim\limits_{x\to\pi}F(x)$.

2. $t \mapsto \pi - t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ donc le théorème de changement de variable s'applique pour I :

$$I = \int_0^{\pi} \frac{t}{2+\sin t}\mathrm{d}t = -\int_{\pi}^{0} \frac{\pi - u}{2+\sin(\pi - u)}\mathrm{d}u = \int_0^{\pi} \frac{\pi - u}{2+\sin u}\mathrm{d}u = \int_0^{\pi} \frac{\pi}{2+\sin u}\mathrm{d}u - \int_0^{\pi} \frac{u}{2+\sin u}\mathrm{d}u = \pi F(\pi) - I \,.$$

On en déduit que $I = \dfrac{\pi}{2}F(\pi)$.

3. a) Pour $a \in \mathbb{R}$: $\displaystyle\int_0^a \frac{1}{1+\theta+\theta^2}\mathrm{d}\theta = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\mathrm{Arctan}\left(\frac{2a}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \frac{\pi}{6}\right).$

b) $\forall t \in \left]-\pi;\pi\right[$, $\displaystyle\frac{2\tan\frac{t}{2}}{1+\tan^2\frac{t}{2}} = \frac{2\tan\frac{t}{2}\cos^2\frac{t}{2}}{\cos^2\frac{t}{2}+\sin^2\frac{t}{2}} = 2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2} = \sin t$.

c) $t \mapsto \tan\dfrac{t}{2}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left]-\pi;\pi\right[$, donc le théorème de changement de variable s'applique :

Pour $x \in \left]-\pi;\pi\right[$, on a : $\displaystyle F(x) = \int_0^{\tan\frac{x}{2}} \frac{1}{1+\theta+\theta^2}\mathrm{d}\theta = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\mathrm{Arctan}\left(\left(2\tan\frac{x}{2}+1\right)/\sqrt{3}\right) - \frac{\pi}{6}\right).$

4. $F(\pi) = \lim\limits_{x\to\pi} F(x) = \dfrac{2\pi}{3\sqrt{3}}$; $I = \dfrac{\pi^2}{3\sqrt{3}}$.

EXERCICE IV

1. a) L'ensemble des solutions de (E_+) sur $\mathbb{R}$ sont : $\left\{x \mapsto -\mathrm{e}^{-x} + \lambda\mathrm{e}^{x}, \lambda \in \mathbb{R}\right\}$.

b) L'ensemble des solutions de (E–) sur $\mathbb{R}$ sont : $\left\{x \mapsto 2x\mathrm{e}^{-x} + \lambda\mathrm{e}^{-x}, \lambda \in \mathbb{R}\right\}$.

2. a) $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) - \left|f(x)\right| = 2\mathrm{e}^{-x}$ donc $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \left|f(x)\right| + 2\mathrm{e}^{-x} > 0$, f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

b) Supposons que f est strictement positive sur $\mathbb{R}$, alors $f \in$ (E_+) donc :
$\exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = -\mathrm{e}^{-x} + \lambda\mathrm{e}^{x}$, mais alors $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, ce qui est contraire à l'hypothèse de positivité. f n'est donc pas strictement positive sur $\mathbb{R}$.

c) Supposons que f est strictement négative sur $\mathbb{R}$, alors $f \in$ (E–) donc :
$\exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 2x\mathrm{e}^{-x} + \lambda\mathrm{e}^{-x} = (2x+\lambda)\mathrm{e}^{-x}$, mais alors $f(\lambda) = 3\lambda\mathrm{e}^{-\lambda}$, et $f(-\lambda) = -3\lambda\mathrm{e}^{\lambda}$ sont de signes opposés ou sont tous deux nuls, ce qui est contraire à l'hypothèse de stricte négativité.
f n'est donc pas strictement négative sur $\mathbb{R}$.

d) f est continue (car dérivable), strictement croissante sur $\mathbb{R}$, et elle n'est pas de signe constant. D'après le théorème de bijection, f s'annule donc une seule fois sur $\mathbb{R}$.

e) si $x \le \alpha$, alors $f(x) \le f(\alpha) = 0$, donc $\left|f(x)\right| = -f(x)$ et f est solution de (E–) sur $\left]-\infty;\alpha\right]$.
Ainsi, $\exists \lambda_1 \in \mathbb{R}, \forall x \in \left]-\infty;\alpha\right], f(x) = 2x\mathrm{e}^{-x} + \lambda_1\mathrm{e}^{-x}$; comme $f(\alpha) = 0$, on a : $\lambda_1 = -2\alpha$

si $x \ge \alpha$, alors $f(x) \ge f(\alpha) = 0$, donc $\left|f(x)\right| = f(x)$ et f est solution de (E_+) sur $\left[\alpha;+\infty\right[$.

Ainsi, $\exists \lambda_2 \in \mathbb{R}, \forall x \in \left[\alpha;+\infty\right[, f(x) = -\mathrm{e}^{-x} + \lambda_2\mathrm{e}^{x}$ comme $f(\alpha) = 0$, on a : $\lambda_2 = \mathrm{e}^{-2\alpha}$.

Finalement, en remarquant que les deux solutions se « recollent » en α, on obtient :

$$f : x \to \begin{cases} 2(x-\alpha)\mathrm{e}^{-x} & \text{si } x \le \alpha \\ \left(\mathrm{e}^{2(x-\alpha)} - 1\right)\mathrm{e}^{-x} & \text{si } x \ge \alpha \end{cases}.$$