MATHEMATIQUES : EXAMEN DU SEMESTRE 2

ICAM LILLE, NANTES, PARIS-SENART, TOULOUSE

Durée : 4 heures

Calculatrices non autorisées.

La notation tiendra compte de la clarté des explications et du soin apporté à la rédaction et à la présentation des résultats.

Rendre séparément le problème, l'exercice 1, l'exercice 2.

PROBLEME *(10 points)*

Dans tout ce problème, on se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$.

On désigne par $\mathscr{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On note $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels et I la matrice identité d'ordre 3. On considère la matrice $A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$.

Partie A

1. Calculer A^2 et A^3, puis exprimer A^2 et A^3 comme combinaison linéaire de A et I.
2. On considère la suite $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ définie par $\alpha_1=\alpha_2=1$ et $\forall n\geq 1, \alpha_{n+2}=\alpha_{n+1}+2\alpha_n$.

   Montrer par récurrence que : $\forall n\geq 2, A^n=\alpha_n A+2\alpha_{n-1}I$.
3. Calculer α_n pour tout $n\geq 1$. En déduire l'expression de A^n en fonction de n, pour tout $n\geq 1$.

Partie B

On note Id l'application identité de $\mathbb{R}^3$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathscr{C}$ est A.

1. Déterminer une base $\mathscr{B}_1$ de $\operatorname{Ker}(f+Id)$ et une base $\mathscr{B}_2$ de $\operatorname{Ker}(f-2Id)$.
2. a. Prouver que la famille $\mathscr{B}=((1;-1;0);(1;0;-1);(1;1;1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

   b. Déterminer la matrice D de f dans la base $\mathscr{B}$.

   c. Donner la matrice de passage P de $\mathscr{C}$ vers $\mathscr{B}$.

   d. Retrouver l'expression de A^n en fonction de n pour tout $n\geq 1$.

Partie C

1. a. Calculer $(A+I)(A-2I)$. En déduire que A est inversible et exprimer A^{-1} comme combinaison linéaire de A et I.

   b. Calculer $(A+I)^2$ et $(A-2I)^2$. Conjecturer une expression simple de $(A+I)^n$ et $(A-2I)^n$ pour tout $n\geq 1$.
2. Soit $M(a,b)$ la matrice définie par $M(a,b)=\begin{pmatrix}a&b&b\\b&a&b\\b&b&a\end{pmatrix}$ où $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ et F l'ensemble défini par $F=\{M(a,b),(a,b)\in\mathbb{R}^2\}$.

   On pose $K=A+I$ et $J=A-2I$.

   a. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, et déterminer sa dimension.

   b. Montrer que (K,J) est une base de F et calculer les coordonnées (α,β) de $M(a,b)$ dans cette base.
3. Calculer $[M(a,b)]^n$ pour tout $n\geq 1$. Vérifier le résultat obtenu dans le cas de $M(0,1)$.

Partie D

Soit $n\geq 1$ et R_n le reste de la division euclidienne du polynôme X^n par le polynôme $(X+1)(X-2)$.

1. Déterminer R_n.
2. Retrouver l'expression de A^n en utilisant le résultat précédent.

EXERCICE 1 *(6 points)*

Partie A

Soit g la fonction définie sur $\mathcal{D} =]-\pi;\pi[\setminus \{0\}$ par $g(x) = \dfrac{xe^x}{\sin x}$.

1. a. Montrer que g est prolongeable par continuité en 0.

   On gardera la notation g pour la fonction ainsi prolongée sur $]-\pi;\pi[$.

   b. Déterminer le développement limité de $g(x)$ d'ordre 2 au voisinage de 0.

2. a. Montrer que g est dérivable en 0 et donner $g'(0)$.

   b. Calculer $g'(x)$ pour tout $x \in \mathcal{D}$.

   c. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = (1+x)\sin x - x\cos x$. Déterminer un équivalent de $h(x)$ au voisinage de 0.

   d. En déduire que la fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\pi;\pi[$.

   e. Montrer que g' est bornée sur $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$. On notera M un majorant de $|g'|$ sur $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

   f. Donner l'équation de la tangente en 0 à la courbe représentative Γ de la fonction g ainsi que sa position relative par rapport à la courbe Γ .

Partie B

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction f_n par $\forall x \in \mathcal{D}, f_n(x) = \dfrac{x}{1+n^2x^2} \times \dfrac{\mathrm{e}^x}{\sin x}$ et l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x)\,dx$.

1. a. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \dfrac{1}{n}\left[\operatorname{Arctan}(nx)\,g(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{Arctan}(nx)\,g'(x)\,dx$.

   b. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, \left|I_n - \dfrac{\pi}{2n}e^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{Arctan}\left(n\dfrac{\pi}{2}\right)\right| \leq \dfrac{M}{n}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{Arctan}(nx)\,dx$,

   puis que : $\forall n \in \mathbb{N}, \left|I_n - \dfrac{\pi}{2n}e^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{Arctan}\left(n\dfrac{\pi}{2}\right)\right| \leq \dfrac{M}{n} \times \dfrac{\pi^2}{4}$.

2. Calculer alors la limite de la suite (I_n).

EXERCICE 2 *(4 points)*

Soit n un entier naturel non nul.

Une urne U_n contient n boules numérotées de 1 à n. On effectue dans cette urne une succession de tirages d'une boule, en appliquant la règle suivante : si la boule tirée porte le numéro k, avant de procéder au tirage suivant, on enlève de l'urne toutes les boules dont le numéro est supérieur ou égal à k.

On note X_n la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour vider l'urne U_n de toutes ses boules.

Partie A

1. Donner la loi de X_1, la loi de X_2 et leurs espérances.
2. Déterminer la loi de X_3 et calculer $E(X_3)$.

Partie B

On étudie désormais le cas général.

1. Calculer $P(X_n = 1)$ et $P(X_n = n)$.
2. Soit N_1 la variable aléatoire égale au numéro de la première boule tirée.
   a. Reconnaître la loi de N_1.
   b. Expliquer pourquoi $\forall i \in [\![2;n]\!],\ \forall k \in [\![2;n]\!],\ P_{(N_1=i)}(X_n = k) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \leq k-1 \\ P(X_{i-1} = k-1) & \text{si } i \geq k \end{cases}$.
   c. Montrer que $\forall k \in [\![2;n]\!],\ P(X_n = k) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=k-1}^{n-1} P(X_i = k-1)$.
3. Pour tout $n \geq 2$, on pose $v_n = n!\,P(X_n = n-1)$.
   a. Etablir que $\forall n \geq 2,\ v_{n+1} = v_n + n$.
   b. Pour tout $n \geq 2$, en déduire v_n en fonction de n puis $P(X_n = n-1)$.

Partie C

On admet que $\forall n \geq 2,\ E(X_n) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} E(X_i) + 1 \quad (*)$.

1. Montrer que $\forall n \geq 2,\ E(X_n) = E(X_{n-1}) + \dfrac{1}{n}$.
2. En déduire que $\forall n \geq 1,\ E(X_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

<u>*BONUS*</u> : On rappelle que $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\left(\sum_{i=k-1}^{n-1} a_{ik}\right) = \sum_{i=1}^{n-1}\left(\sum_{k=2}^{i+1} a_{ik}\right)$ pour toute suite (a_{ik}).

Démontrer $(*)$.