PROBLEME

Partie A

1. $\boxed{A^2 = A+2I}$ et $\boxed{A^3 = 3A+2I}$.

2. Soit, $\forall n \geq 2$, $H_n : A^n = \alpha_n A + 2\alpha_{n-1} I$

Initialisation : $A^2 = A+2I = \alpha_2 A + 2\alpha_1 I$. H_2 est donc vraie.

Hérédité : soit $n \geq 2$. On suppose $A^n = \alpha_n A + 2\alpha_{n-1} I$ (H_n vraie).

$$A^{n+1} = A \times \left(\alpha_n A + 2\alpha_{n-1} I\right) = \alpha_n A^2 + 2\alpha_{n-1} A = \alpha_n \left(A+2I\right) + 2\alpha_{n-1} A = \left(\alpha_n + 2\alpha_{n-1}\right) A + 2\alpha_n I$$

Or pour $n \geq 2$, $\alpha_{n+1} = \alpha_n + 2\alpha_{n-1}$. Donc $A^{n+1} = \alpha_{n+1} A + 2\alpha_n I$. H_{n+1} est donc vraie.

Par principe de récurrence, $\boxed{\forall n \geq 2,\ \ A^n = \alpha_n A + 2\alpha_{n-1} I}$.

3. $\left(\alpha_n\right)$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique : $r^2 - r - 2 = 0$, admettant pour solutions $r_1 = -1$ et $r_2 = 2$. On a donc : $\forall n \geq 1$, $\alpha_n = c(-1)^n + d.2^n$ avec c et d réels.

De plus, $\begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -c+2d = 1 \\ c+4d = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -1/3 \\ d = 1/3 \end{cases}$. Donc $\boxed{\forall n \geq 1,\ \alpha_n = -\frac{1}{3}.(-1)^n + \frac{1}{3}.2^n}$

Pour $n = 1$, $A^n = A$

Pour $n \geq 2$, $A^n = \left(-\frac{1}{3}.(-1)^n + \frac{1}{3}.2^n\right)A + 2\left(-\frac{1}{3}.(-1)^{n-1} + \frac{1}{3}.2^{n-1}\right)I$

$$\boxed{A^n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2.(-1)^n + 2^n & -(-1)^n + 2^n & -(-1)^n + 2^n \\ -(-1)^n + 2^n & 2.(-1)^n + 2^n & -(-1)^n + 2^n \\ -(-1)^n + 2^n & -(-1)^n + 2^n & 2.(-1)^n + 2^n \end{pmatrix}}$$

Remarque : la formule obtenue pour $n \geq 2$ fonctionne aussi pour $n = 1$.

Partie B

1. $\forall a \in \mathbb{R}^3$, on pose $a = (x;y;z)$. $a \in \operatorname{Ker}(f+Id) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=0 \\ x+y+z=0 \\ x+y+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \{x+y+z=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\alpha-\beta \\ y = \alpha \\ z = \beta \end{cases}$

Donc $\operatorname{Ker}(f+Id) = \left\{\alpha(-1;1;0) + \beta(-1;0;1) / (\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2\right\} = \operatorname{vect}\left((-1;1;0),(-1;0;1)\right)$.

$\boxed{\mathscr{B}_1 = \left\{(-1;1;0),(-1;0;1)\right\}}$ est libre et génératrice de $\operatorname{Ker}(f+Id)$, c'est une base de $\operatorname{Ker}(f+Id)$;

de même, on trouve $\boxed{\mathscr{B}_2 = \left\{(1;1;1)\right\}}$ base de $\operatorname{Ker}(f-2Id)$.

2.a. $\operatorname{card}(\mathscr{B}) = 3 = \dim\left(\mathbb{R}^3\right)$ et $\mathscr{B}$ est libre (démo au choix…) donc $\boxed{\mathscr{B}\text{ est une base de } \mathbb{R}^3}$.

2.b. On pose $b_1 = (1;-1;0)$. Alors $f(b_1) = -b_1$ (soit en remarquant que $b_1 \in \operatorname{Ker}(f+Id)$ donc $f(b_1) + b_1 = 0_{\mathbb{R}^3}$, soit en calculant $\operatorname{Mat}_{\mathscr{C}}\left(f(b_1)\right) = \operatorname{Mat}_{\mathscr{C}}(f) \times \operatorname{Mat}_{\mathscr{C}}(b_1)$) ;

de même, on trouve $f\left((-1;0;1)\right) = f(b_2) = -b_2$ et $f\left((1;1;1)\right) = f(b_3) = 2b_3$.

On en déduit que : $\boxed{\boldsymbol{D} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \end{pmatrix}}$

2.c. $\boxed{\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}}$

2.d. $P^{-1} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. On a alors $A^n = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}\left(f^n\right) = P \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\left(f^n\right) \times P^{-1}$, donc $A^n = P \times D^n \times P^{-1}$

Avec $D^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$ car D est diagonale.

On retrouve après calculs la matrice obtenue en **A**3), valable pour tout $n \geq 1$.

<u>Partie C</u>

1.a. $\boxed{\boldsymbol{(A+I)(A-2I)=0}}$, donc $A^2 - A - 2I = 0$.

On obtient alors $A \times \left(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}I\right) = I$, donc A est inversible et $\boxed{\boldsymbol{A^{-1} = \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}I = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}}}$

1.b. On pose $K = A + I$.

$K^2 = 3K$, $K^3 = 3K \times K = 9K$, $K^4 = 9K \times K = 27K$. $\boxed{\textbf{On conjecture pour } \boldsymbol{n \geq 1} \textbf{ : } \boldsymbol{K^n = 3^{n-1}K}\textbf{.}}$

On pose $J = A - 2I$

$J^2 = -3J$, $J^3 = -3J \times J = 9J$, $J^4 = 9J \times J = -27J$. $\boxed{\textbf{On conjecture pour } \boldsymbol{n \geq 1} \textbf{ : } \boldsymbol{J^n = (-3)^{n-1}J}\textbf{.}}$

2.a. $F = \left\{aI + bA \,/\, (a;b) \in \mathbb{R}^2\right\} = \mathrm{vect}(A;I)$ donc F est un sev de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

$D = \{A, I\}$ est une famille libre et génératrice de F, c'est donc une base de F et $\boxed{\mathbf{dim}(\boldsymbol{F}) = \mathbf{2}}$.

2.b. $K = A + I$ et $J = A - 2I$ appartiennent à F car ce sont des combinaisons linéaires de A et I.

De plus, $\{K, J\}$ est libre et $\mathrm{card}(\{K,J\}) = 2 = \dim F$. Donc $\boxed{\boldsymbol{\{K,J\}} \textbf{ est une base de } \boldsymbol{F}}$.

$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$, $M_{a,b} = aI + bA$ or $\begin{cases} K = A + I \\ J = A - 2I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3A = 2K + J \\ 3I = K - J \end{cases}$, donc

$$M_{a,b} = \frac{a}{3}(K - J) + \frac{b}{3}(2K + J) = \frac{1}{3}(a + 2b)K + \frac{1}{3}(b - a)J.$$

$\boxed{\textbf{Les coordonnées de } \boldsymbol{M_{a,b}} \textbf{ dans la base } \boldsymbol{(K,J)} \textbf{ sont : } \boldsymbol{(\alpha;\beta) = \left(\frac{1}{3}(a+2b);\frac{1}{3}(b-a)\right)}\textbf{.}}$

3. $M_{a,b} = \alpha K + \beta J$. Or d'après la question **C**1a), $KJ = 0$. On vérifie $JK = 0 = KJ$.

donc αK et βJ commutent, on peut utiliser la formule du binôme de Newton :

$$\left(M_{a,b}\right)^n=\left(\alpha K+\beta J\right)^n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(\alpha K)^i(\beta J)^{n-i}=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\alpha^i\beta^{n-i}K^iJ^{n-i}$$

Quand $i=0$, $K^iJ^{n-i}=J^n=(-3)^{n-1}J$;

quand $i=n$, $K^iJ^{n-i}=K^n=(3)^{n-1}K$;

quand $i\neq 0$ et $i\neq n$, $K^iJ^{n-i}=0$ car $KJ=0$.

Finalement, pour $n\geq 1$, $\left(M_{a,b}\right)^n=\binom{n}{0}\beta^nJ^n+\binom{n}{n}\alpha^nK^n=\beta^n(-3)^{n-1}J+\alpha^n(3)^{n-1}K$

$$\left(M_{a,b}\right)^n=\beta^n(-3)^{n-1}\begin{pmatrix}-2&1&1\\1&-2&1\\1&1&-2\end{pmatrix}+\alpha^n(3)^{n-1}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$$, soit :

$$\boxed{\left(M_{a,b}\right)^n=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}(a-b)^n+\frac{1}{3}(a+2b)^n & \frac{-1}{3}(a-b)^n+\frac{1}{3}(a+2b)^n & \frac{-1}{3}(a-b)^n+\frac{1}{3}(a+2b)^n\\ \frac{-1}{3}(a-b)^n+\frac{1}{3}(a+2b)^n & \frac{2}{3}(a-b)^n+\frac{1}{3}(a+2b)^n & \frac{-1}{3}(a-b)^n+\frac{1}{3}(a+2b)^n\\ \frac{-1}{3}(a-b)^n+\frac{1}{3}(a+2b)^n & \frac{-1}{3}(a-b)^n+\frac{1}{3}(a+2b)^n & \frac{2}{3}(a-b)^n+\frac{1}{3}(a+2b)^n\end{pmatrix}}$$

Vérification : avec $a=0$ et $b=1$ on retrouve bien $A^n=M_{0,1}{}^n$.

Partie D

1. D'après le théorème de la division euclidienne :

$\exists!(Q,R)\in\mathbb{R}[X]^2$ tq $X^n=(X+1)(X-2)Q+R$ et $\deg(R)<\deg\left((X+1)(X-2)\right)$, soit $R=cX+d$.

On a donc $\forall x\in\mathbb{R}$, $x^n=(x+1)(x-2)Q(x)+R(x)$

En particulier, pour $x=-1$: $(-1)^n=-c+d$; pour $x=2$: $2^n=2c+d$;

ce qui donne $3c=2^n-(-1)^n$ et $3d=2^n+2(-1)^n$, donc $\boxed{R=\frac{1}{3}\left[\left(2^n-(-1)^n\right)X+2^n+2(-1)^n\right]}$

2. Pour $P=\sum_{i=1}^{n}a_iX^i\in\mathbb{R}[X]$, on note : $P(A)=\sum_{i=1}^{n}a_iA^i$.

On a $X^n=BQ+R$, donc $A^n=B(A)Q(A)+R(A)=(A+I)(A-2I)Q(A)+R(A)$:

or $(A+I)(A-2I)=0$; on obtient donc : $\boxed{A^n=R(A)=\frac{1}{3}\left(2^n-(-1)^n\right)A+\frac{1}{3}\left(2^n+2(-1)^n\right)I}$.

Remarque : on retrouve bien les valeurs obtenues en **C**3)…

EXERCICE 1

Partie A

1. a. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ par dérivabilité de la fonction sinus en 0, donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sin x} = 1$, de plus $\lim\limits_{x\to 0} \mathrm{e}^x = 1$. Alors $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 1$.

   Donc $\boxed{\textbf{en posant } g(0)=1\textbf{, } g \textbf{ est prolongeable par continuité en 0}}$.

   b. $\mathrm{e}^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + o_0\left(x^2\right)$ et $\sin x = x - \dfrac{x^3}{6} + o_0\left(x^3\right) = x\left(1 - \dfrac{x^2}{6} + o_0\left(x^2\right)\right)$, on a donc :

$$g(x) = \frac{x\left(1 + x + \dfrac{x^2}{2} + o_0\left(x^2\right)\right)}{x\left(1 - \dfrac{x^2}{6} + o_0\left(x^2\right)\right)} = \frac{1 + x + \dfrac{x^2}{2} + o_0\left(x^2\right)}{1 - \dfrac{x^2}{6} + o_0\left(x^2\right)} = \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + o_0\left(x^2\right)\right)\left(1 + \frac{x^2}{6} + o_0\left(x^2\right)\right) = 1 + x + \frac{2}{3}x^2 + o_0\left(x^2\right).$$

   Ainsi $\boxed{\boldsymbol{g(x) = 1 + x + \frac{2}{3}x^2 + o_0\left(x^2\right)}}$.

2. a. Au voisinage de 0, g admet un développement limité d'ordre 2 (donc g admet un développement limité d'ordre 1!), d'où : $\boxed{\boldsymbol{g} \textbf{ est dérivable en 0 et } \boldsymbol{g'(0) = 1}}$.

   b. La fonction g est dérivable sur $]-\pi;0[$ et $]0;\pi[$ comme produit et quotient de fonctions dérivables sur ces intervalles.

   Soit $x \in \mathcal{D}$, $g'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x(1+x)\sin x - x\mathrm{e}^x \cos x}{\sin^2 x}$. Donc $\boxed{\boldsymbol{\forall x \in \mathcal{D}, g'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x\left[(1+x)\sin x - x\cos x\right]}{\sin^2 x}}}$.

   c. $(1+x)\sin x = (1+x)\left(x + o_0\left(x^2\right)\right) = x + x^2 + o_0\left(x^2\right)$ et $x\cos x = x\left(1 - \dfrac{x^2}{2} + o_0\left(x^2\right)\right) = x + o_0\left(x^2\right)$ d'où :

   $h(x) = x^2 + o_0\left(x^2\right)$. On a donc : $\boxed{\boldsymbol{h(x) \underset{0}{\sim} x^2}}$.

   d. La fonction g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-\pi;0[$ et $]0;\pi[$ comme produit et quotient de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur ces intervalles. On a montré que g est dérivable en 0.

   $\forall x \in \mathcal{D}$, $g'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x h(x)}{\sin^2 x}$. Or $\sin x \underset{0}{\sim} x$ et $\mathrm{e}^x \underset{0}{\sim} 1$ donc $g'(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{1 \times x^2}{x^2} \underset{0}{\sim} 1$, alors $\lim\limits_{x\to\infty} g'(x) = 1 = g'(0)$.

   g' est donc continue en 0, et g est de classe $\mathscr{C}^1$ en 0. Ainsi $\boxed{\textbf{la fonction } \boldsymbol{g} \textbf{ est de classe } \boldsymbol{\mathscr{C}^1} \textbf{ sur } \boldsymbol{]-\pi;\pi[}}$.

   e. g' est continue sur $]-\pi;\pi[$ donc sur $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$, g' étant continue sur un segment, elle est donc bornée sur ce segment.

   Donc $\boxed{\boldsymbol{g'} \textbf{ est bornée sur } \boldsymbol{\left[0;\frac{\pi}{2}\right]}}$.

   f. $g(x) = 1 + x + \dfrac{2}{3}x^2 + o_0\left(x^2\right)$, alors $\boxed{\textbf{la tangente à } \boldsymbol{\Gamma} \textbf{ en 0 a pour équation } \boldsymbol{y = 1 + x}}$.

   $g(x) - (1+x) = \dfrac{2}{3}x^2 + o_0\left(x^2\right)$, alors $g(x) - (1+x) \underset{0}{\sim} \dfrac{2}{3}x^2$, or $\forall x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{2}{3}x^2 \geq 0$, donc $g(x) - (1+x) \geq 0$ au voisinage de 0.

   Donc $\boxed{\textbf{la tangente à } \boldsymbol{\Gamma} \textbf{ en 0 est en-dessous de } \boldsymbol{\Gamma} \textbf{ au voisinage de 0}}$.

Partie B

1. a. Soit $n\in\mathbb{N}$, $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+n^2x^2}g(x)\,dx$.

On pose $u(x)=\frac{1}{n}\operatorname{Arctan}(nx)$, dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $u'(x)=\frac{1}{1+n^2x^2}$; u et g sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

Par intégration par parties, on obtient : $I_n=\left[\frac{1}{n}\operatorname{Arctan}(nx)\,g(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{n}\operatorname{Arctan}(nx)\,g'(x)\,dx$.

Donc, par linéarité de l'intégrale : $\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ I_n=\frac{1}{n}\left[\operatorname{Arctan}(nx)\,g(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{Arctan}(nx)\,g'(x)\,dx}$.

b. Soit $n\in\mathbb{N}$, $I_n=\frac{1}{n}\left(\operatorname{Arctan}\left(n\frac{\pi}{2}\right)\times\frac{\pi}{2}e^{\frac{\pi}{2}}\right)-\frac{1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{Arctan}(nx)\,g'(x)\,dx$, donc

$$\left|I_n-\frac{1}{n}\left(\operatorname{Arctan}\left(n\frac{\pi}{2}\right)\frac{\pi}{2}e^{\frac{\pi}{2}}\right)\right|=\left|I_n-\frac{\pi}{2n}e^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{Arctan}\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right|=\left|-\frac{1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{Arctan}(nx)\,g'(x)\,dx\right|=\frac{1}{n}\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{Arctan}(nx)\,g'(x)\,dx\right|$$

Comme $0<\frac{\pi}{2}$, on a donc $\left|I_n-\frac{\pi}{2n}e^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{Arctan}\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right|\le\frac{1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|\operatorname{Arctan}(nx)\,g'(x)\right|dx$.

Or $\forall x\in[0;+\infty[$, $\operatorname{Arctan}x\ge 0$ d'où $\forall x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, $\left|\operatorname{Arctan}(nx)\right|=\operatorname{Arctan}(nx)$, de plus $\forall x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, $\left|g'(x)\right|\le M$,

alors $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|\operatorname{Arctan}(nx)\,g'(x)\right|dx\le\int_0^{\frac{\pi}{2}}M\times\operatorname{Arctan}(nx)\,dx$, d'où :

$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ \left|I_n-\frac{\pi}{2n}e^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{Arctan}\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right|\le\frac{M}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{Arctan}(nx)\,dx}$.

Soit $n\in\mathbb{N}$, $\forall x\in[0;+\infty[$, $\operatorname{Arctan}x<\frac{\pi}{2}$, alors

$$\left|I_n-\frac{\pi}{2n}e^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{Arctan}\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right|\le\frac{M}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{Arctan}(nx)\,dx\le\frac{M}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\pi}{2}\,dx=\frac{M}{n}\times\frac{\pi}{2}\times\frac{\pi}{2}.$$

Donc $\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ \left|I_n-\frac{\pi}{2n}e^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{Arctan}\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right|\le\frac{M}{n}\times\frac{\pi^2}{4}}$.

2. Le théorème d'encadrement donne : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(I_n-\frac{\pi}{2n}e^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{Arctan}\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right)=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{Arctan}x=\frac{\pi}{2}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\operatorname{Arctan}\left(n\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$, et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{\pi}{2n}e^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{Arctan}\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right)=0$. Finalement, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}I_n=0}$.

EXERCICE 2

Notation : $i\text{T}j$ désigne l'événement « tirer la boule n°j au i-ème tirage » avec i et j dans $[\![1;n]\!]$.

Partie A

1. L'urne U_1 ne contenant qu'une seule boule, $\boxed{\boldsymbol{X_1} \textbf{ ne prend que la valeur 1}}$, et $\boxed{\boldsymbol{E(X_1) = 1}}$.

L'urne U_2 contient deux boules.

Elle est vidée en 1 fois si on obtient la boule n°1 au premier tirage : $P(X_2 = 1) = P(1\text{T}1) = \dfrac{1}{2}$;

Elle est vidée en 2 fois si on obtient la boule n°2 au premier tirage : $P(X_2 = 2) = P(1\text{T}2) = \dfrac{1}{2}$.

On en déduit que $\boxed{\boldsymbol{X_2} \textbf{ suit la loi uniforme sur \{1 ; 2\}}}$, et $\boxed{\boldsymbol{E(X_2)} = 1\times\dfrac{1}{2}+2\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}}$.

2. L'urne U_3 contient trois boules.

Pour vider l'urne en 1 fois, il faut tirer la boule n°1 au premier tirage : $P(X_3 = 1) = P(1\text{T}1) = \dfrac{1}{3}$;

Pour vider l'urne en 3 fois, il faut tirer successivement la boule n°3, puis la boule n°2 :

$P(X_3 = 3) = P(1\text{T}3 \cap 2\text{T}2) = P_{1\text{T}3}(2\text{T}2)\times P(1\text{T}3) = \dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{6}$;

Ainsi :

$\boldsymbol{x_i}$	**1**	**2**	**3**
$\boldsymbol{P(X_3 = x_i)}$	$\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$	$1-\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6}\right)=\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$	$\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}$

et $\boxed{\boldsymbol{E(X_3)} = 1\times\dfrac{1}{3}+2\times\dfrac{1}{2}+3\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{\mathbf{11}}{\mathbf{6}}}$.

Partie B

1. $\boxed{\boldsymbol{P(X_n = 1) = P(1\text{T}1) = \dfrac{1}{n}}}$.

$$P(X_n = n) = P\left(\bigcap_{i=1}^{n} i\text{T}i\right) = P(1\text{T}1)\times P_{1\text{T}1}(2\text{T}2)\times P_{(1\text{T}1\cap 2\text{T}2)}(3\text{T}3)\times\ldots\times P_{\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} i\text{T}i\right)}(n\text{T}n) = \frac{1}{n}\times\frac{1}{n-1}\times\frac{1}{n-2}\times\ldots\times 1$$

(d'après la formule des probabilités composées). D'où : $\boxed{\boldsymbol{P(X_n = n) = \dfrac{1}{n!}}}$

2. a. $\boxed{\boldsymbol{N_1} \textbf{ suit la loi uniforme sur } [\![\mathbf{1};\boldsymbol{n}]\!]}$.

b. $\forall i \in [\![2;n]\!]$, $\forall k \in [\![2;n]\!]$, sachant que $N_1 = i$, il ne reste dans l'urne après le premier tirage que les boules numérotées de 1 à $i-1$. Ainsi, l'urne sera vidée en au plus i tirages, d'où :

si $k \geq i+1$ alors $P_{(N_1=i)}(X_n = k) = 0$;

si $k \leq i$, vider l'urne en k tirages, revient à vider une urne contenant $i-1$ boules en $k-1$ tirages, donc $P_{(N_1=i)}(X_n = k) = P(X_{i-1} = k-1)$.

c. $(N_1 = i)_{1\leq i\leq n}$ constitue un système complet d'événements de probabilités non nulles.

La formule des probabilités totales donne :

$$\forall k \in [\![2;n]\!],\ P(X_n = k) = \sum_{i=1}^{n} P_{N_1=i}(X_n = k)\times P(N_1 = i) = P_{N_1=1}(X_n = k) + \sum_{i=2}^{n} P_{N_1=i}(X_n = k)\times P(N_1 = i)$$

$k \geq 2$ donc $P_{(N_1=1)}(X_n = k) = 0$, et $\forall i \in [\![2;n]\!],\ P(N_1 = i) = \dfrac{1}{n}$, d'où (avec la question précédente) :

$\forall k \in [\![2;n]\!],\ P(X_n = k) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=k}^{n} P(X_{i-1} = k-1)$, ou encore, par un changement d'indice dans la somme :

$$\boxed{\forall k \in [\![2;n]\!],\ P(X_n = k) = \frac{1}{n}\sum_{i=k-1}^{n-1} P(X_i = k-1)}$$

3. a. Pour tout $n \geq 2$, d'après les résultats des questions **B**1 et **B**2.c. , on a :

$$v_{n+1} = (n+1)!\,P(X_{n+1} = n) = (n+1)!\times\frac{1}{n+1}\sum_{i=n-1}^{n} P(X_i = n-1) = n!\times\big(P(X_{n-1} = n-1) + P(X_n = n-1)\big)$$

$$= n!\times\frac{1}{(n-1)!} + n!\,P(X_n = n-1) = n + v_n \quad \text{d'où : } \boxed{\forall n \geq 2,\ v_{n+1} = n + v_n}.$$

b. $\forall k \geq 2,\ v_{k+1} - v_k = k$ d'où : $\forall n \geq 3,\ \displaystyle\sum_{k=2}^{n-1}(v_{k+1} - v_k) = \sum_{k=2}^{n-1} k$ ce qui donne : $\forall n \geq 3,\ v_n = \dfrac{(n+1)(n-2)}{2} + v_2$.

On remarque que cette égalité est également vraie pour n = 2. De plus, $v_2 = 2\times P(X_2 = 1) = 1$.

On a donc : $\boxed{\forall n \geq 2,\ v_n = \dfrac{n(n-1)}{2}}$, et par suite : $\boxed{P(X_n = n-1) = \dfrac{n(n-1)}{2n!} = \dfrac{1}{2(n-2)!}}$.

Partie C

Question BONUS : $\forall n \geq 2,\ E(X_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\times P(X_n = k) \underset{\mathbf{B}2\text{c.}}{=} P(X_n = 1) + \sum_{k=2}^{n}\left(k\times\frac{1}{n}\sum_{i=k-1}^{n-1} P(X_i = k-1)\right)$

$$= \frac{1}{n} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{k=2}^{i+1} k\times P(X_i = k-1) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{i}(k+1)\times P(X_i = k)$$

$$= \frac{1}{n} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}\left(\underbrace{\sum_{k=1}^{i} k\times P(X_i = k)}_{E(X_i)} + \underbrace{\sum_{k=1}^{i} P(X_i = k)}_{1}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1} E(X_i) + \frac{1}{n} + \frac{n-1}{n}$$

Finalement : $\boxed{\forall n \geq 2,\ E(X_n) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} E(X_i) + 1}$

1. $\forall n \geq 3,\ E(X_n) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} E(X_i) + 1 = \dfrac{1}{n}E(X_{n-1}) + \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-2} E(X_i) + 1$

$$= \frac{1}{n}E(X_{n-1}) + \frac{n-1}{n}\big(E(X_{n-1}) - 1\big) + 1 = E(X_{n-1}) + \frac{1}{n}$$

De plus, $E(X_2) = \dfrac{3}{2}$ et $E(X_1) + \dfrac{1}{2} = 1 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}$, donc $\boxed{\forall n \geq 2,\ E(X_n) = E(X_{n-1}) + \dfrac{1}{n}}$.

2. $\forall k \geq 2,\ E(X_k) - E(X_{k-1}) = \dfrac{1}{k}$ d'où : $\forall n \geq 2,\ \displaystyle\sum_{k=2}^{n}\big(E(X_k) - E(X_{k-1})\big) = \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}$, soit encore :

$\forall n \geq 2,\ E(X_n) = \displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} + E(X_1) = \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} + 1 = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.

Cette égalité étant également vraie pour n = 1, on en déduit que : $\boxed{\forall n \geq 1,\ E(X_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}$.