EXERCICE I

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$.

On considère le point A d'affixe $a=\sqrt{3}-i$, et le point B, image du point A par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

On réalisera une figure tout au long de l'exercice avec des traits de construction apparents.

1. Mettre *a* sous forme exponentielle. Placer A.

2. a) Déterminer l'affixe de B sous forme algébrique et sous forme exponentielle. Placer B.

b) Déduire des calculs précédents les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

3. Soit le point C tel que le triangle OAC est rectangle en O direct, et les points A, B et C sont alignés
Placer C, puis déterminer l'affixe du point C.

EXERCICE II

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On veut résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$(2+iz)^n=(2-iz)^n \quad (E_n)$$

1. Résoudre l'équation (E_n) pour $n = 1$; $n = 2$; $n = 3$; et $n = 4$.

2. Soit $u=e^{i\theta}$ avec $\theta\in[0;\pi[\cup]\pi;2\pi[$.

a) Exprimer le nombre complexe $c=\frac{1-u}{1+u}$ sous forme exponentielle et déterminer le module et un argument de *c*.

b) En déduire le module et un argument du nombre complexe z tel que :

$$\frac{2+iz}{2-iz}=u\,.$$

c) Que peut-on en déduire quant à la nature des solutions de (E_n) ?

3. En utilisant la question précédente, donner les solutions de l'équation (E_n), pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.
Attention au cas où n est pair…

T.S.V.P.

EXERCICE III

Soit $A=\begin{pmatrix} 3 & -5 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 5 & -5 & -2 \end{pmatrix}$. On note $I_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Première partie

1. Montrer que : $A^3 = 6A + A^2$.

2. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$ il existe deux réels a_n et b_n tels que : $A^n = a_n A + b_n A^2$, et établir que $\forall n \geq 1, a_{n+1} = 6b_n$ et $b_{n+1} = a_n + b_n$.

3. Vérifier que $\forall n \geq 1,\ b_{n+2} = b_{n+1} + 6b_n$, et en déduire les formes explicites des suites $(b_n)_{n\geq 1}$ et $(a_n)_{n\geq 1}$ pour tout $n \geq 1$.

4. Expliciter $A^n, \forall n \geq 1$.

Deuxième partie

1. Déterminer pour quelles valeurs du paramètre λ la matrice $A - \lambda I_3$ est inversible.
On ne demande pas de l'inverser !

2. Résoudre le système d'équation matricielle $AX = 3X$, où $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{R})$.

3. Résoudre le système d'équation matricielle $AX = -2X$, où $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{R})$.

4. Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que P est inversible et déterminer P^{-1}.

b) Calculer $D = P^{-1}AP$.

c) Montrer que pour tout entier naturel n, $A^n = PD^nP^{-1}$, et retrouver le résultat de la question **4** de la **Partie1**.

5. Résoudre l'équation $A^n X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{R})$, pour tout entier naturel n.

Barème envisagé : 5 points - 6 points- 9 points