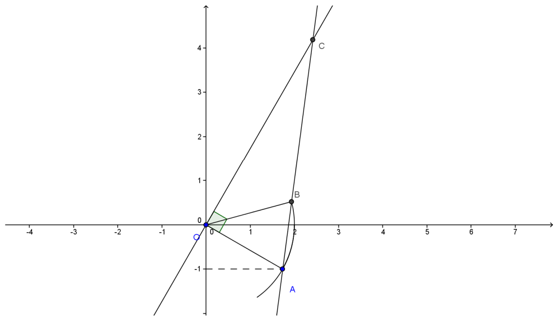
EXERCICE I

1. $a=2\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{6}}$



2. a) En notant b l'affixe du point B , on a :

$$b=\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}\times 2\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{6}}=\begin{cases}2\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{12}}\\ \left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\sqrt{3}-i\right)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\end{cases}$$

b) $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$; $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

3. OAC est rectangle direct en O, on en déduit (en notant c l'affixe du point C) que (à 2π-près) :

$$\arg\left(\frac{c-0}{a-0}\right)=\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow \arg(c)-\arg(a)=\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow \arg(c)=\frac{\pi}{3}\text{ ; donc } c=|c|\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}$$

Les points A, B et C sont alignés donc :

$$\frac{c-a}{b-a}\in\mathbb{R}\Leftrightarrow \operatorname{Im}\left(\frac{c-a}{b-a}\right)=0\Leftrightarrow \operatorname{Im}\left(\frac{|c|\left(1+i\sqrt{3}\right)-2\sqrt{3}+2i}{\sqrt{6}+\sqrt{2}+\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)i-2\sqrt{3}+2i}\right)=0\Leftrightarrow\left(|c|=2\sqrt{2}+2\right)$$

Finalement, $c=\left(\sqrt{2}+1\right)+i\sqrt{3}\left(\sqrt{2}+1\right)$

EXERCICE II

1. Pour n = 1 : (E_1) $\left(2+iz=2-iz\right)\Leftrightarrow\left(z=0\right)$;

pour n = 2 : (E_2) $\left((2+iz)^2=(2-iz)^2\right)\Leftrightarrow\left(z=0\right)$;

pour n = 3 : (E_3) $\left((2+iz)^3=(2-iz)^3\right)\Leftrightarrow\left(z^3-12z=0\right)\Leftrightarrow\left(z\in\left\{0;\sqrt{12};-\sqrt{12}\right\}\right)$;

pour n = 4 : (E_4) $\left((2+iz)^4=(2-iz)^4\right)\Leftrightarrow\left(8z^3-32z=0\right)\Leftrightarrow\left(z\in\left\{0;2;-2\right\}\right)$.

2. a) $c=\dfrac{1-\mathrm{e}^{i\theta}}{1+\mathrm{e}^{i\theta}}=\dfrac{\mathrm{e}^{i\frac{\theta}{2}}\left(\mathrm{e}^{-i\frac{\theta}{2}}-\mathrm{e}^{i\frac{\theta}{2}}\right)}{\mathrm{e}^{i\frac{\theta}{2}}\left(\mathrm{e}^{-i\frac{\theta}{2}}+\mathrm{e}^{i\frac{\theta}{2}}\right)}=\dfrac{-2i\sin\frac{\theta}{2}}{2\cos\frac{\theta}{2}}=\tan\frac{\theta}{2}\mathrm{e}^{i\frac{3\pi}{2}}$ donc :

$$|c|=\left|\tan\frac{\theta}{2}\right|\text{ et (à }2\pi\text{-près) }\arg(c)=\begin{cases}\frac{3\pi}{2}\quad\text{si }\theta\in[0;\pi[\\ \frac{\pi}{2}\quad\text{si }\theta\in]\pi;2\pi[\end{cases}.$$

b) $\left(\dfrac{2+iz}{2-iz}=u\right)\Leftrightarrow\left(z=2i\dfrac{1-u}{1+u}\right)\Rightarrow\left(z=2\tan\dfrac{\theta}{2}\right)$ donc

$|z|=\left|2\tan\dfrac{\theta}{2}\right|$ et (à 2π-près): $\arg(z)=\begin{cases}0 & \text{si } \theta\in[0;\pi[\\ \pi & \text{si } \theta\in]\pi;2\pi[\end{cases}$

c) On déduit de la question précédente que les solutions de (E_n) sont des nombres réels.

3. Pour tout entier $n\geq 1$, $-2i$ n'est clairement pas solution de (E_n) donc, avec les notations de la question précédente :

$$\left(z \text{ solution de } (E_n)\right)\Leftrightarrow\left(\left(\frac{2+iz}{2-iz}\right)^n=1\right)\Leftrightarrow\left(u^n=1 \wedge u\neq-1\right)\Leftrightarrow\left(\exists k\in[\![0;n-1]\!], u=e^{i\frac{2k\pi}{n}} \wedge u\neq -1\right)$$

$$\Leftrightarrow\left(\exists k\in[\![0;n-1]\!]\setminus\left\{\frac{n}{2}\right\}, z=2\tan\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right)$$

EXERCICE III

Première partie

1. $A^2=\begin{pmatrix}9 & -5 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 5 & -5 & 4\end{pmatrix}$ et $A^3=\begin{pmatrix}27 & -35 & 0\\ 0 & -8 & 0\\ 35 & -35 & -8\end{pmatrix}$ d'où : $A^3=6A+A^2$.

2. Pour tout entier $n\geq 1$, soit P_n : « $\exists(a_n;b_n)\in\mathbb{R}^2,\ A^n=a_nA+b_nA^2$ ».

$A=1\times A+0\times A^2$ donc P_1 est vérifiée avec $a_1=1$ et $b_1=0$.

Soit $n\geq 1$, on suppose P_n vraie, c'est-à-dire : $\exists(a_n;b_n)\in\mathbb{R}^2,\ A^n=a_nA+b_nA^2$

Alors : $A^{n+1}=a_nA^2+b_nA^3=a_nA^2+b_n\left(6A+A^2\right)=6b_nA+\left(a_n+b_n\right)A^2$, la propriété P_{n+1} est donc vraie, avec $a_{n+1}=6b_n$ et $b_{n+1}=a_n+b_n$.

Par principe de récurrence, la propriété P_n est donc vraie $\forall n\geq 1$.

3. $\forall n\geq 1,\ b_{n+2}=a_{n+1}+b_{n+1}=6b_n+b_{n+1}$.

La suite (b_n) est une suite récurrence linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique $r^2-r-6=0$ qui a pour racine 3 et -2. Ainsi, $\forall n\geq 1, b_n=\lambda\times 3^n+\mu\times(-2)^n$.

De plus, $b_1=0$ et $b_2=1$; on en déduit que : $\forall n\geq 1, b_n=\dfrac{1}{15}\times 3^n+\dfrac{1}{10}\times(-2)^n$.

D'autre part, $\forall n\geq 1,\ a_n=b_{n+1}-b_n=\dfrac{2}{15}\times 3^n-\dfrac{3}{10}\times(-2)^n$

4. $\forall n\geq 1, A^n=\begin{pmatrix}3^n & -3^n+(-2)^n & 0\\ 0 & (-2)^n & 0\\ 3^n-(-2)^n & -3^n+(-2)^n & (-2)^n\end{pmatrix}$.

Deuxième partie

1. $A-\lambda I_3=\begin{pmatrix}3-\lambda & -5 & 0\\ 0 & -2-\lambda & 0\\ 5 & -5 & -2-\lambda\end{pmatrix}$.

On voit directement que si $\lambda=-2$, la matrice a une colonne nulle, elle n'est donc pas être inversible.

Si $\lambda=3$: $A-3I_3=\begin{pmatrix}0 & -5 & 0\\ 0 & -5 & 0\\ 5 & -5 & -5\end{pmatrix}\underset{L_2\leftarrow L_1-L_2}{\sim}\begin{pmatrix}0 & -5 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 5 & -5 & -5\end{pmatrix}$;

$A-3I_3$ est équivalent à une matrice ayant une ligne nulle, elle n'est donc pas inversible.

Si $\lambda\notin\{-2;3\}$:

$$A-\lambda I_3=\begin{pmatrix}3-\lambda & -5 & 0\\ 0 & -2-\lambda & 0\\ 5 & -5 & -2-\lambda\end{pmatrix}\underset{\substack{L_1\leftarrow\frac{1}{3-\lambda}L_1\\ L_2\leftarrow\frac{1}{-2-\lambda}L_1}}{\sim}\begin{pmatrix}1 & \dfrac{-5}{3-\lambda} & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 5 & -5 & -2-\lambda\end{pmatrix}\underset{L_3\leftarrow L_3-5L_1}{\sim}\begin{pmatrix}1 & \dfrac{-5}{3-\lambda} & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & \dfrac{10+5\lambda}{3-\lambda} & -2-\lambda\end{pmatrix}$$

$$\underset{L_3\leftarrow L_3-\left(\frac{10+5\lambda}{3-\lambda}\right)L_2}{\sim}\begin{pmatrix}1 & \dfrac{-5}{3-\lambda} & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -2-\lambda\end{pmatrix}$$ qui est une matrice triangulaire inversible.

Ainsi $A-\lambda I_3$ est inversible si, et seulement si $\lambda\notin\{-2;3\}$.

2. $AX=3X\Leftrightarrow\begin{cases}-5y=0\\ -5y=0\\ 5x-5y-5z=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-z=0\\ y=0\end{cases}$ d'où $S=\left\{\begin{pmatrix}x\\0\\x\end{pmatrix}, x\in\mathbb{R}\right\}$.

3. $AX=-2X\Leftrightarrow(5x-5y=0)$, d'où $S=\left\{\begin{pmatrix}x\\x\\z\end{pmatrix},(x;z)\in\mathbb{R}^2\right\}$.

4. a) $P^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

b) $D=\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}$.

c) Pour tout entier n, soit P_n : « $A^n=PD^nP^{-1}$ » ;

$A^0=I_3=PD^0P^{-1}$ donc P_0 est vraie.

Soit un entier n ; on suppose que P_n est vraie, c'est-à-dire : $A^n=PD^nP^{-1}$, alors
$A^{n+1}=PD^nP^{-1}A=PD^n\underbrace{P^{-1}P}_{I_3}DP^{-1}=PD^nDP^{-1}=PD^{n+1}P^{-1}$ donc P_{n+1} est vraie.

Par principe de récurrence, P_n est vraie pour tout entier n.

On a donc :

$$A^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3^n & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^n & -3^n + (-2)^n & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ 3^n - (-2)^n & -3^n + (-2)^n & (-2)^n \end{pmatrix}$$

5. $A^n X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow PD^nP^{-1}X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow X = P\left(D^n\right)^{-1} P^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-2)^{-n} \\ (-2)^{-n} \\ (-2)^{-n} \end{pmatrix}$, pour tout entier naturel n.