EXERCICE I

Soit $n \in \mathbb{N}$, et f_n la fonction réelle définie par :

$$f_0(x) = \frac{\sin(x)}{2-\cos(x)} \text{ et pour } n \neq 0,\ f_n(x) = \frac{\sin(x)}{2-\cos(x)} - \frac{x}{n}$$

Première partie : Généralités sur f_n

Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé.

1. Justifier que f_n est définie sur $\mathbb{R}$.

2. f_n est-elle paire ? f_n est-elle impaire ? Justifier.

3. f_n est-elle $2\pi -$ périodique ?

4. Montrer qu'il suffit d'étudier f_n sur $[0;\pi]$ pour tracer son graphe sur $\mathbb{R}$ en entier. Justifier.

Deuxième partie : Etude de la fonction f_0

Un repère orthonormé du plan étant donné, on note $\mathscr{C}_0$ le graphe de f_0 sur $\mathbb{R}$.

1. Etudier la dérivabilité de f_0 sur $\mathbb{R}$ et calculer $f_0'(x)$.

2. Donner le tableau de variations complet de f_0 sur $[0;\pi]$ puis tracer $\mathscr{C}_0$. On donne $\sqrt{3} \approx 1,732$.

3. Déterminer les maximum et minimum de f_0 sur $\mathbb{R}$, puis le maximum de $|f_0|$ sur $\mathbb{R}$.

Troisième partie : Utilisation d'une primitive de f_0

On considère l'équation différentielle linéaire du premier ordre

$$\mathscr{E}:\ y' + \frac{\sin(x)}{2-\cos(x)}y = 2\sin(x)$$

Soit $\mathscr{H}$ l'équation homogène associée à $\mathscr{E}$.

1. Justifier que f_0 admet des primitives sur $\mathbb{R}$, et les déterminer.

2. Résoudre $\mathscr{H}$ sur $\mathbb{R}$.

3. Déterminer l'unique solution φ de $\mathscr{E}$ sur $\mathbb{R}$ qui vérifie $\varphi(0) = 1$.

T.S.V.P.

EXERCICE II

Soit $a \in]0;\pi[$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par :

$$u_0 = 1,\ u_1 = 2\cos(a),\ \text{et}\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 2\cos(a)u_{n+1} - u_n$$

Démontrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{\sin((n+1)a)}{\sin(a)}$$

EXERCICE III

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par :

$$u_0 = 0,\ \text{et}\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{2u_n+3}{u_n+4} = f(u_n)\ \text{avec}\ f(x) = \frac{2x+3}{x+4}$$

1. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet exactement deux solutions $a < b$ dans $\mathbb{R}$.

2. Résoudre $f(x) = a$ et montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \neq a$$

3. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \dfrac{u_n - b}{u_n - a}$ est une suite géométrique.

4. Donner v_n en fonction de *n*, et en déduire u_n en fonction de *n*.

5. Déterminer la limite éventuelle de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Barème envisagé : 13 points - 2 points - 5 points