Math Sup **ES01 - Analyse - CORRECTION** **2015-2016**

EXERCICE I

Première partie : Généralités sur f_n

1. $\forall x \in \mathbb{R}, |\cos(x)| \leq 1$ donc $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(x) \neq 2$ et f_n est définie sur $\mathbb{R}$.

2. $\forall n \in \mathbb{N}$, $D_{f_n} = \mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0, et $\forall x \in \mathbb{R}, f_n(-x) = -f_n(x)$ donc f_n est impaire.

3. $\forall x \in \mathbb{R}, f_0(x+2\pi) = f_0(x)$ donc f_0 est $2\pi-$ périodique.

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, f_n(x+2\pi) = f_n(x) - \dfrac{2\pi}{n}$, donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, f_n$ n'est pas $2\pi-$ périodique.

4. Soit $\mathscr{R} = (O; \vec{i}\,; \vec{j})$ un repère du plan. Soit $\mathscr{C}_n$ le graphe de la restriction de f_n à $[0;\pi]$ dans $\mathscr{R}$.
f_n étant impaire, par symétrie par rapport à O, on déduit de $\mathscr{C}_n$ le graphe de la restriction de f_n à $[-\pi;\pi]$ dans $\mathscr{R}$.

Pour le graphe de f_0 (qui est $2\pi-$ périodique), on complète alors par des translations de vecteur $\pm 2\pi\vec{i}$;

Pour le graphe de f_n ($n \neq 0$), on complète par des translations de vecteur $\pm\left(2\pi\vec{i} - \dfrac{2\pi}{n}\vec{j}\right)$.

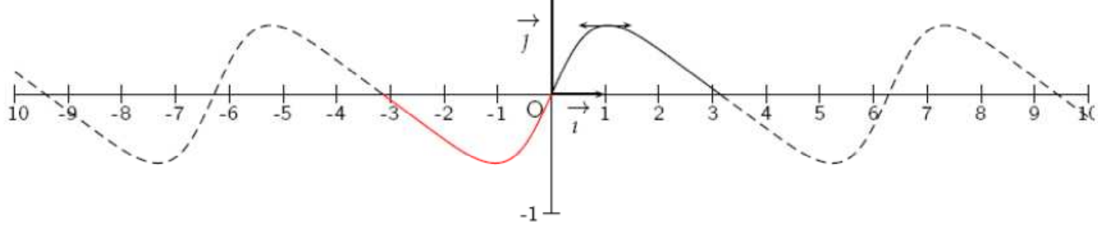
Deuxième partie : Etude de la fonction f_0

1. f_0 est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, et $\forall x \in \mathbb{R}, f_0'(x) = \dfrac{2\cos(x) - 1}{(2-\cos(x))^2}$.

2. Le signe de $f_0'(x)$ sur $[0;\pi]$ est celui de $2\cos(x)-1$, et la décroissance de cos sur $[0;\pi]$ donne le tableau de variations suivant :

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
$f_0'(x)$		$+$	0	$-$	
f_0	0	$\nearrow$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\searrow$	0

Et le graphe de $\mathscr{C}_0$ est le suivant :



3. De la périodicité et de la parité de f_0, on déduit que $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ est le maximum de f_0 sur $\mathbb{R}$, et $\dfrac{-1}{\sqrt{3}}$ est le minimum de f_0 sur $\mathbb{R}$; enfin $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ est le maximum de $|f_0|$ sur $\mathbb{R}$.

Troisième partie : Utilisation d'une primitive de f_0

1. f_0 est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc continue sur $\mathbb{R}$ et admet des primitives sur $\mathbb{R}$ qui sont :

$x \mapsto \ln\left(2-\cos(x)\right)+K,\ K \in \mathbb{R}$

2. $x \mapsto \ln\left(2-\cos(x)\right)$ étant une primitive de $x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{2-\cos(x)}$ sur $\mathbb{R}$, on en déduit que l'ensemble des solutions de $\mathscr{H}$ est : $S_{\mathscr{H}} = \left\{ x \mapsto C\mathrm{e}^{-\ln\left(2-\cos(x)\right)} = \dfrac{C}{2-\cos(x)}, C \in \mathbb{R} \right\}$.

3. Déterminons une solution particulière de $\mathscr{E}$ sur $\mathbb{R}$ par la méthode de variation de la constante.

Posons, $\forall x \in \mathbb{R}, y_p(x) = z(x)h(x)$, où z est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, et $h : x \mapsto \dfrac{1}{2-\cos(x)}$ est une solution de $\mathscr{H}$.

y_p est solution de $\mathscr{E}$ sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si,

$\forall x \in \mathbb{R}, z'(x)h(x)+z(x)h'(x)+z(x)h(x)\dfrac{\sin(x)}{2-\cos(x)} = 2\sin(x)$

ce qui est équivalent à : $\forall x \in \mathbb{R}, z'(x)h(x) = 2\sin(x)$ (car h est une solution de $\mathscr{H}$)

ce qui est équivalent à : $\forall x \in \mathbb{R}, z'(x) = 2\sin(x)\left(2-\cos(x)\right)$

dont une primitive sur $\mathbb{R}$ est $x \mapsto \left(2-\cos(x)\right)^2$.

On a donc : $S_{\mathscr{E}} = \left\{ x \mapsto 2-\cos(x)+\dfrac{C}{2-\cos(x)}, C \in \mathbb{R} \right\}$.

Enfin, $\varphi \in S_{\mathscr{E}}$ et $\varphi(0)=1$ donne $C=0$ puis $\phi : x \mapsto 2-\cos(x)$.

EXERCICE II

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2. L'équation caractéristique associée est :

$r^2 - 2\cos(a)\, r + 1 = 0$ dont les racines dans $\mathbb{C}$ sont e^{ia} et e^{-ia}.

Ainsi, $\exists(\lambda;\mu) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda\cos(na)+\mu\sin(na)$.

De plus, $\begin{cases} u_0 = 1 = \lambda \\ u_1 = 2\cos(a) = \lambda\cos(a)+\mu\sin(a) \end{cases}$, d'où (comme $\sin(a) \neq 0$) : $\begin{cases} \lambda = 1 \\ \mu = \dfrac{\cos(a)}{\sin(a)} \end{cases}$

Finalement, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \cos(na)+\dfrac{\cos(a)}{\sin(a)}\sin(na) = \dfrac{\cos(na)\sin(a)+\cos(a)\sin(na)}{\sin(a)} = \dfrac{\sin\left((n+1)a\right)}{\sin(a)}$.

Remarque : la démonstration peut également se faire à l'aide d'une récurrence double.

EXERCICE III

1. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-4\}$. $f(x) = x \Leftrightarrow \dfrac{2x+3}{x+4} = x \Leftrightarrow 2x+3 = x^2+4x \Leftrightarrow x^2+2x-3=0 \Leftrightarrow x \in \{1;-3\}$

Ainsi, l'équation $f(x) = x$ admet exactement deux solutions $a < b$ dans $\mathbb{R}$ qui sont a = -3 et b = 1.

2. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-4\}$. $f(x) = -3 \Leftrightarrow \dfrac{2x+3}{x+4} = -3 \Leftrightarrow 2x+3 = -3x-12 \Leftrightarrow x = -3$.

Soit $\forall n \in \mathbb{N}$, la propriété P_n : "$u_n \neq -3$".

$u_0 = 0 \neq -3$ donc la propriété est vraie pour n = 0.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que P_n est vraie, c'est-à-dire que $u_n \neq -3$;

alors $f(u_n) \neq -3$ (car $f(x) = -3 \Leftrightarrow x = -3$), ce qui équivaut à $u_{n+1} \neq -3$.

La propriété P_{n+1} est donc vraie.

Par principe de récurrence, on en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \neq -3$.

3. $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 3}$. $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie car $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \neq -3$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+3} = \frac{\dfrac{2u_n+3}{u_n+4} - 1}{\dfrac{2u_n+3}{u_n+4} + 3} = \frac{1}{5} \times \frac{u_n - 1}{u_n + 3} = \frac{1}{5} v_n .$$

On en déduit que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{5}$.

4. On déduit de ce qui précède que : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = v_0 \times \left(\dfrac{1}{5}\right)^n = -\dfrac{1}{3} \times \left(\dfrac{1}{5}\right)^n$,

et comme $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 3} \Leftrightarrow u_n = \dfrac{1+3v_n}{1-v_n}$ ($\forall n \in \mathbb{N}, v_n \neq 1$ est immédiat), on en déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1 - \left(\dfrac{1}{5}\right)^n}{1 + \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{5}\right)^n} .$$

5. $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{1}{5}\right)^n = 0$ donc, par opérations algébriques sur les limites, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$.