EXERCICE 1

La notation $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$ désigne le $\mathbb{R}$ - espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2.

On identifiera dans ce problème les éléments de $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$ et leurs fonctions polynomiales associées.

On note $\mathscr{B} = (1 ; \mathrm{X} ; \mathrm{X}^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$.

On définit les deux applications suivantes :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_2[\mathrm{X}] & \to & \mathbb{R}_2[\mathrm{X}] \\ P & \mapsto & \frac{1}{2}\left(P\left(\frac{\mathrm{X}}{2}\right)+P\left(\frac{\mathrm{X}+1}{2}\right)\right) \end{array} \quad \text{et} \quad \varphi : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_2[\mathrm{X}] & \to & \mathbb{R} \\ P & \mapsto & P(1) \end{array}$$

On rappelle que l'on note $f^0 = Id_{\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]}$, et $\forall n \in \mathbb{N}^* : f^n = f \circ f^{n-1}$.

1- a) Montrer que *f* et φ sont linéaires.

b) Justifier que la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/4 & 1/8 \\ 0 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$$

c) L'application f est-elle injective ? surjective ? (Justifier les réponses.)

d) Déterminer une base de $\operatorname{Ker} \varphi$. Quelle est la dimension de $\operatorname{Ker} \varphi$?

e) L'application φ est-elle injective ? surjective ? (Justifier les réponses.)

2. On note $\mathscr{B}'$ la famille de $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$ définie par : $\mathscr{B}' = (1 ; -2\mathrm{X} + 1 ; 6\mathrm{X}^2 - 6\mathrm{X} + 1)$.

a) Justifier que la famille $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$.

b) Ecrire la matrice *M* de *f* dans la base $\mathscr{B}'$ (en donnant les calculs intermédiaires).

c) Calculer A^n pour tout *n* de $\mathbb{N}$ (expliciter chaque coefficient).

d) Pour $n \in \mathbb{N}$ et $P = a + b\mathrm{X} + c\mathrm{X}^2$ avec $(a;b;c) \in \mathbb{R}^3$, déterminer $f^n(P)$, en fonction de *a*, *b* et *c*.

e) En déduire que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[\mathrm{X}],\ \lim_{n\to+\infty} \varphi\left(f^n(P)\right) = \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t$$

T.S.V.P.

EXERCICE 2

On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$

On considère les vecteurs $\vec{u}=\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$, $\overrightarrow{e_1}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\vec{i}+\vec{k}\right),\overrightarrow{e_2}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\left(-\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}\right),\overrightarrow{e_3}=\overrightarrow{e_1}\wedge\overrightarrow{e_2}$.

1. Montrer que la matrice dans la base $\left(\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ de la rotation r d'axe Vect$\left\{\vec{u}\right\}$ d'angle π est :

$$R=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2 & 2 & -1\\ 2 & 1 & -2\\ -1 & -2 & -2\end{pmatrix}$$

2. a) Déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{e_3}$ dans la base $\left(\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$, et justifier que la famille $\mathcal{B}'=\left(\overrightarrow{e_1};\overrightarrow{e_2};\overrightarrow{e_3}\right)$ est une base orthonormée de l'espace.

b) Déterminer la matrice de passage P de la base $\left(\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ dans la base $\mathcal{B}'$, et vérifier que $P^{-1}={}^{t}P$.

c) Déterminer la matrice dans la base $\mathcal{B}'$, puis dans la base $\left(\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$, de la réflexion s de plan d'équation : $x+2y-z=0$.

3. Calculer la matrice de la composée $r\circ s$ dans la base $\left(\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$, et en déduire la nature de l'endomorphisme $r\circ s$.

Barème envisagé : 12 points - 8 points