EXERCICE 1

1- a) $\forall(P,Q,\lambda)\in\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]\times\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]\times\mathbb{R},\ f(P+\lambda Q)=f(P)+\lambda f(Q)$ et $\varphi(P+\lambda Q)=\varphi(P)+\lambda\varphi(Q)$ donc f et φ sont linéaires.

b) On exprime dans la base $\mathscr{B}$ les images par f des vecteurs de cette même base :

$$f(1)=\frac{1}{2}(1+1)=1;\ f(\mathrm{X})=\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{X}}{2}+\frac{\mathrm{X}+1}{2}\right)=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\mathrm{X};\ f(\mathrm{X}^2)=\frac{1}{2}\left(\left(\frac{\mathrm{X}}{2}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{X}+1}{2}\right)^2\right)=\frac{1}{8}+\frac{1}{4}\mathrm{X}+\frac{1}{4}\mathrm{X}^2;$$

ainsi, la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$ est $A=\begin{pmatrix}1 & 1/4 & 1/8\\ 0 & 1/2 & 1/4\\ 0 & 0 & 1/4\end{pmatrix}$

c) La matrice de f est échelonnée. Son rang est clairement 3 ; f est donc un isomorphisme.

d) $\mathrm{Ker}\ \varphi=\mathrm{Vect}\{\mathrm{X}^2-1;\mathrm{X}-1\}$. $\dim(\mathrm{Ker}\ \varphi)=2$.

e) Le noyau de φ n'étant pas $\{0\}$, l'application n'est pas injective.

Le théorème du rang donne : $\mathrm{rg}(\varphi)=\dim(\mathbb{R}^3)-\dim(\mathrm{Ker}\ \varphi)=1=\dim(\mathbb{R})$, φ est donc surjective.

2. a) La famille $\mathscr{B}$' est échelonnée en degrés et de cardinal 3 ; c'est donc une base de $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$.

b) Si on note $B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & -2 & -6\\ 0 & 0 & 6\end{pmatrix}$ la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}$', on a

$$B^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 1/2 & 1/3\\ 0 & -1/2 & -1/2\\ 0 & 0 & 1/6\end{pmatrix}\ \text{et}\ M=B^{-1}AB=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1/2 & 0\\ 0 & 0 & 1/4\end{pmatrix}.$$

c) $A^0=I_3=BM^0B^{-1}$;

soit $n\in\mathbb{N}$, on suppose que $A^nB=M^nB^{-1}$, alors $A^{n+1}=AA^n=BMB^{-1}BM^nB^{-1}=BM^{n+1}B^{-1}$

Par principe de récurrence, $\forall n\in\mathbb{N}$: $A^n=BM^nB^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 1/2-1/2^{n+1} & 1/3-1/2^{n+1}+1/(6\times4^n)\\ 0 & 1/2^n & 1/2^n-1/4^n\\ 0 & 0 & 1/4^n\end{pmatrix}$

d) $A^n\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+(1/2-1/2^{n+1})b+(1/3-1/2^{n+1}+1/(6\times4^n))c\\ (1/2^n)b+(1/2^n-1/4^n)c\\ (1/4^n)c\end{pmatrix}$ donc

$$f^n(P)=a+(1/2-1/2^{n+1})b+(1/3-1/2^{n+1}+1/(6\times4^n))c+((1/2^n)b+(1/2^n-1/4^n)c)\mathrm{X}+(1/4^n)c\mathrm{X}^2$$

e) $\forall P\in\mathbb{R}_2[\mathrm{X}],\varphi(f^n(P))=a+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^{n+1}}\right)b+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{6\times4^n}\right)c$

d'où : $\lim\limits_{n\to+\infty}\varphi(f^n(P))=a+\frac{1}{2}b+\frac{1}{3}c=\int_0^1P(t)\mathrm{d}t$

EXERCICE 2

1. On considère les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}=\sqrt{2}\,\overrightarrow{e_1}$ et $\vec{w}=\sqrt{3}\,\overrightarrow{e_2}$ (qui sont deux à deux orthogonaux).

On vérifie que ce vecteurs forment une famille libre de cardinal 3, donc une base de $\mathbb{R}^3$.

Dans la base $\left(\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right)$, la matrice de r est : $M=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$; la matrice de passage de la base $\left(\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ à la base $\left(\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right)$ est $P_1=\begin{pmatrix}1&1&-1\\2&0&1\\-1&1&1\end{pmatrix}$, son inverse $P_1^{-1}=\dfrac{1}{6}\begin{pmatrix}1&2&-1\\3&0&3\\-2&2&2\end{pmatrix}$

On a : $R=P_1MP_1^{-1}=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}-2&2&-1\\2&1&-2\\-1&-2&-2\end{pmatrix}$.

2. a) $\overrightarrow{e_3}=\dfrac{1}{\sqrt{6}}\left(-\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}\right)$, la famille $\mathcal{B}'=\left(\overrightarrow{e_1};\overrightarrow{e_2};\overrightarrow{e_3}\right)$ est une famille libre de cardinal 3 ; $\overrightarrow{e_1}\cdot\overrightarrow{e_2}=0$, $\left\|\overrightarrow{e_1}\right\|=\left\|\overrightarrow{e_2}\right\|=1$ et $\overrightarrow{e_3}=\overrightarrow{e_1}\wedge\overrightarrow{e_2}$ donc $\mathcal{B}'$ est donc une base orthonormée de l'espace.

b) $P=\dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}\sqrt{3}&-\sqrt{2}&-1\\0&\sqrt{2}&-2\\\sqrt{3}&\sqrt{2}&1\end{pmatrix}$; ${}^tPP=I_3$ donc ${}^tP=P^{-1}$

c) On remarque que $\left(\overrightarrow{e_1};\overrightarrow{e_2}\right)$ est une base du plan vectoriel d'équation : $x+2y-z=0$.

On a donc : $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}'}(s)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$, puis $S=\mathrm{mat}_{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})}(s)=P.\,\mathrm{mat}_{\mathcal{B}'}(s).\,P^{-1}=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}2&-2&1\\-2&-1&2\\1&2&2\end{pmatrix}$

3. $\mathrm{mat}_{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})}(r\circ s)=RS=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$; $r\circ s=-Id$.