Math Sup **ES02- Analyse et Probabilités** **2015-2016**

EXERCICE 1

Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $a_n = \int_0^1 \left(\dfrac{1+t^2}{2} \right)^n \mathrm{d}t$.

I . Etude de la suite (a_n)

1. Montrer que la suite (a_n) est monotone.

2. En déduire qu'elle est convergente. On note ℓ sa limite.

3. Justifier que $\forall t \in [0;1],\ 1+t^2 \leq 1+t$ et en déduire que $\ell = 0$.

II. Etude de la série $\sum (-1)^k a_k$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que :

$$\forall t \in [0;1],\ \sum_{p=0}^{n} (-1)^p \left(\frac{1+t^2}{2} \right)^p = \frac{2}{3+t^2} - (-1)^{n+1} \frac{2}{3+t^2} \left(\frac{1+t^2}{2} \right)^{n+1}$$

2. Justifier que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq \int_0^1 \dfrac{2}{3+t^2} \left(\dfrac{1+t^2}{2} \right)^{n+1} \mathrm{d}t \leq \dfrac{2}{3} a_{n+1}$

3. Calculer l'intégrale $\int_0^1 \dfrac{2}{3+t^2} \mathrm{d}t$.

4. En conclure que la série $\sum (-1)^k a_k$ converge, et déterminer sa somme.

EXERCICE 2

Le facteur doit distribuer *n* lettres deux à deux distinctes à *n* destinataires avec $n \in \mathbb{N}^*$.
En supposant que le facteur distribue les lettres au hasard, on souhaite étudier le nombre D_n de distributions qui font qu'aucun destinataire n'obtienne sa lettre.

I. Recherche d'une expression de D_n

1. Déterminer D_1, D_2 et D_3. Justifier.
On admet que pour tout entier $n \geq 1$, $D_{n+2} = (n+1)(D_{n+1} + D_n)$ (Bonus : le démontrer)

2. En déduire D_4 et D_5.

3. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $v_n = D_{n+1} - (n+1) D_n$.
Prouver que (v_n) est géométrique et en déduire que pour tout entier $n \geq 1 : D_{n+1} = (n+1) D_n + (-1)^{n+1}$.

4. Etablir que pour tout entier $n \geq 1$ $\dfrac{D_n}{n!} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$

5. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{D_n}{n!}$.

T.S.V.P.

II. Une autre façon de calculer les D_n

On pose pour tout x de $I =]-\infty;1[$

$$g(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}$$

1. a) Montrer que g est solution sur I de l'équation différentielle

$$(1-x)y' = xy$$

b) En déduire, à l'aide de la formule de Leibniz, que pour tout x de I :

$$(1-x)g^{(n+1)}(x) - (x+n)g^{(n)}(x) - ng^{(n-1)}(x) = 0$$

2. On pose $\delta_n = g^{(n)}(0)$. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, $\delta_n = D_n$.
On pose par convention $D_0 = \delta_0$.

3. A l'aide de la formule de Leibniz appliquée à $e^x g(x) = \frac{1}{1-x}$, montrer que pour tout entier $n \geq 0$:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_k = n!$$

4. a) Justifier que $g(x)$ admet un développement limité à tout ordre en 0.

b) Déterminer le développement limité de $g(x)$ à l'ordre 3en 0. Retrouver la valeur de D_3.

5. Plus généralement, on souhaite retrouver l'expression de D_n en fonction de n.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{n} b_k X^k$ deux polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$.

a) Exprimer le coefficient de degré n du polynôme $R = PQ$, en fonction des a_k et b_k, $k \in [\![0;n]\!]$.

b) A l'aide du développement limité de $g(x)$ à l'ordre n en 0, retrouver une expression de D_n.

III. Une Application

On considère n boules et n tiroirs numérotés de 1 à n. On place initialement chaque boule dans le tiroir portant son numéro. On sort les n boules que l'on replace aléatoirement dans les tiroirs, à raison d'une boule par tiroir. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de boules ayant retrouvé leur tiroir d'origine. On suppose toutes les répartitions équiprobables.

1. Pour $k \in [\![0;n]\!]$, justifier que la probabilité de l'événement ($x = k$) est

$$P(X = k) = \frac{\binom{n}{k} D_{n-k}}{n!}$$

2. Montrer que pour tout $k \in [\![1;n]\!]$

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$$

et en déduire l'espérance de X.

Barème envisagé : 6 points - 14 points