D.M. n°1	ETUDE DE SUITES

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^x - x$.

1. Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, l'équation $g(x) = n$ admet exactement deux solutions, l'une strictement négative notée a_n, l'autre strictement positive notée b_n.

2. Recherche d'une valeur approchée de a_2 :

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = -1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = e^{u_n} - 2 \end{cases}$$

a) Montrer que $-2 < a_2 < -1$

b) Vérifier que $e^{a_2} - 2 = a_2$. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_2 \leq u_n \leq -1.$$

c) Montrer que :

$$\forall x \in [a_2; -1],\ 0 \leq e^x - e^{a_2} \leq \frac{1}{e}(x - a_2)$$

d) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_{n+1} - a_2 \leq \frac{1}{e}(u_n - a_2),$$

Puis :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n - a_2 \leq \left(\frac{1}{e}\right)^n$$

e) Ecrire un algorithme permettant d'obtenir une valeur de a_2 par excès à ε près, ε étant un réel strictement positif donné.

3. Etude de la suite (b_n)

a) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2,\ \ln n \leq b_n \leq \ln(2n).$$

b) En déduire la limite de (b_n) et de $\left(\frac{b_n}{\ln n}\right)$