D.M. n°1 — ETUDE DE SUITES — CORRECTION

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^x - x$.

1. Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, l'équation $g(x) = n$ admet exactement deux solutions, l'une strictement négative notée a_n, l'autre strictement positive notée b_n.

Les limites des fonctions usuelles donnent : $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$.

Les croissances comparées donnent : $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

g est dérivable sur son domaine (comme somme de fonctions dérivables)
pour tout réel x ; $g'(x) = e^x - 1$. On en déduit le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
g	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à la fonction continue g donne le résultat attendu.

2. Recherche d'une valeur approchée de a_2 :

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = -1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = e^{u_n} - 2 \end{cases}$$

Dans la suite, on notera h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = e^x - 2$.
Pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = h(u_n)$.
On remarque d'ores et déjà que la fonction h est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

a) Montrer que $-2 < a_2 < -1$

$g(-2) > 2 > g(-1)$

b) Vérifier que $e^{a_2} - 2 = a_2$.

Par définition, a_2 vérifie $g(a_2) = 2$ ce qui équivaut à $e^{a_2} - a_2 = 2$ et donc $e^{a_2} - 2 = a_2$ qui équivaut à $h(a_2) = a_2$.

En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_2 \leq u_n \leq -1$

Soit, pour tout entier n, la propriété : P_n : $a_2 \leq u_n \leq -1$.
D'après la question a), la propriété est vraie pour $n = 0$.
Supposons la propriété vraie pour un entier n. On a donc : $a_2 \leq u_n \leq -1$.
En appliquant la fonction h, strictement croissante, on obtient : $a_2 \leq u_{n+1} \leq e^{-1} - 2 < -1$.
Ainsi, la propriété est vraie pour $n + 1$.
Par principe de récurrence, on en déduit que la propriété P_n est vraie pour tout entier n.

c) Montrer que :

$$\forall x \in [a_2;-1],\ 0 \le \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{a_2} \le \frac{1}{\mathrm{e}}(x - a_2)$$

On a : $x \in [a_2;-1] \Rightarrow \mathrm{e}^x \ge \mathrm{e}^{a_2}$ d'où $\forall x \in [a_2;-1],\ 0 \le \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{a_2}$

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-1}x$ est dérivable sur son domaine comme somme de fonctions dérivables, et pour tout réel x : $f'(x) = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-1}$.

Elle est donc strictement décroissante sur $[a_2;-1]$. On a donc : $\mathrm{e}^{a_2} - \frac{1}{\mathrm{e}}a_2 \ge \mathrm{e}^x - \frac{1}{\mathrm{e}}x$ d'où

$\forall x \in [a_2;-1],\ \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{a_2} \le \frac{1}{\mathrm{e}}(x - a_2)$

(Nous verrons plus tard dans l'année que ce résultat est une application directe d'un théorème sur la dérivation, appelé inégalité des accroissements finis…)

d) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \le u_{n+1} - a_2 \le \frac{1}{\mathrm{e}}(u_n - a_2),$$

La question b) donne : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - a_2 = \mathrm{e}^{u_n} - 2 - a_2 = \mathrm{e}^{u_n} - \mathrm{e}^{a_2}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ a_2 \le u_n \le -1$.

La question c) donne le résultat attendu.

Puis $$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \le u_n - a_2 \le \left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^n$$

Soit, pour tout entier n, la propriété : H_n : $0 \le u_n - a_2 \le \left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^n$.

D'après la question a), la propriété est vraie pour $n = 0$.

Supposons la propriété vraie pour un entier n. On a donc : $0 \le u_n - a_2 \le \left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^n$.

D'où, en utilisant le résultat précédent : $0 \le u_{n+1} - a_2 \le \frac{1}{\mathrm{e}}(u_n - a_2) \le \left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^{n+1}$

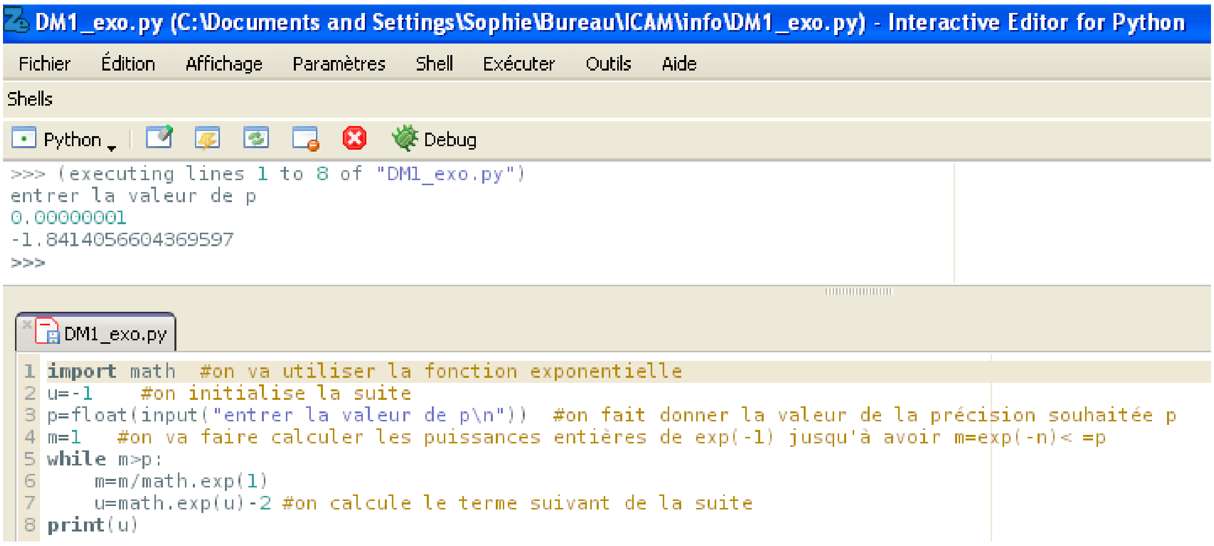
Ainsi, la propriété est vraie pour $n+1$.
Par principe de récurrence, on en déduit que la propriété H_n est vraie pour tout entier n.

e) Ecrire un algorithme permettant d'obtenir une valeur de a_2 par excès à ε près, ε étant un réel strictement positif donné.

Le principe consiste à calculer les termes de la suite (u_n) jusqu'à avoir $0 \le u_n - a_2 \le \left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^n \le \varepsilon$.

u_n est bien une valeur approchée de a_2 par excès $(a_2 \le u_n)$ à ε près.

Dans l'algorithme suivant, écrit en langage Python, on note p la valeur de ε (pour éviter les caractères spéciaux !) .




```
>>> (executing lines 1 to 8 of "DM1_exo.py")
entrer la valeur de p
0.00000001
-1.8414056604369597
>>>
```

```python
import math  #on va utiliser la fonction exponentielle
u=-1    #on initialise la suite
p=float(input("entrer la valeur de p\n"))  #on fait donner la valeur de la précision souhaitée p
m=1   #on va faire calculer les puissances entières de exp(-1) jusqu'à avoir m=exp(-n)< =p
while m>p:
    m=m/math.exp(1)
    u=math.exp(u)-2 #on calcule le terme suivant de la suite
print(u)
```

3. Etude de la suite (b_n)

a) Montrer que :

$$\forall n\in\mathbb{N}, n\geq 2,\ \ln n\leq b_n\leq\ln(2n).$$

$\forall n\in\mathbb{N}, n\geq 2$ $g(\ln(n)) = n - \ln(n) \leq n$, donc $\ln(n) \leq b_n$.

$g(\ln(2n)) = 2n - \ln(2n)$.

Une rapide étude de la fonction t définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $t(x) = x - \ln(2x)$ montre qu'elle est positive et donc que : $\forall n\in\mathbb{N}, n\geq 2$, $0 \leq t(n)$, et donc $n \leq g(\ln(2n))$ et par suite $b_n \leq \ln(2n)$.

b) En déduire la limite de (b_n) et de $\left(\dfrac{b_n}{\ln n}\right)$

$\forall n\in\mathbb{N}, n\geq 2,\ \ln n\leq b_n$, donc le théorème de comparaison donne : $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = +\infty$.

De plus, $\forall n\in\mathbb{N}, n\geq 2,\ \left(\ln n\leq b_n\leq\ln(2n)\right) \Leftrightarrow \left(1\leq\dfrac{b_n}{\ln n}\leq 1+\dfrac{\ln 2}{\ln n}\right)$.

Le théorème d'encadrement donne : $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{b_n}{\ln n} = 1$