D.M. n°3	NOMBRES COMPLEXES	Correction

On considère l'équation :

$$z^4+4z^3+6z^2+(6-2i)z+3-2i=0 \qquad \text{d'inconnue } z\in\mathbb{C}$$

1) En effectuant le changement de variable $u = z + 1$, déterminer les solutions de cette équation.

Si $P(z) = z^4+4z^3+6z^2+(6-2i)z+3-2i$, $P(-1 + u) = u\,(u^3 + 2 - 2i)$

Les racines de $P(-1 + u)$ sont 0 et les racines cubiques de $-2+2i = 2\sqrt{2}\,e^{\frac{3i\pi}{4}}$ c'est-à-dire :

$$\sqrt{2}\,e^{\frac{i\pi}{4}}\,(=1+i),\ \sqrt{2}\,e^{\frac{i\pi}{4}+\frac{2i\pi}{3}}\left(=\frac{-1-\sqrt{3}}{2}+i\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right),\ et\ \sqrt{2}\,e^{\frac{i\pi}{4}+\frac{4i\pi}{3}}\left(=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}+i\frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right)$$

On en déduit les solutions de l'équation :

$$z_1=-1;\ z_2=i;\ z_3=-\frac{\sqrt{3}+3}{2}+i\frac{\sqrt{3}-1}{2};\ z_4=\frac{\sqrt{3}-3}{2}-i\frac{\sqrt{3}+1}{2}.$$

2) Montrer que les solutions de cette équation sont les affixes des sommets et du centre d'un triangle équilatéral :

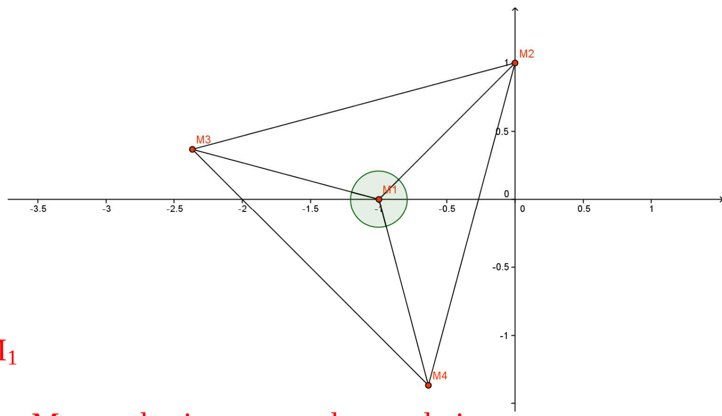
Soient M_1, M_2, M_3 et M_4 les points du plan complexe d'affixes z_1, z_2, z_3 et z_4 respectivement.

a) En calculant des modules ;

$|z_3-z_2|=|z_4-z_2|=|z_4-z_3|=\sqrt{6}$ donc le triangle $M_2M_3M_4$ est équilatéral ;

$|z_2-z_1|=|z_3-z_1|=|z_4-z_1|=\sqrt{2}$ donc M_1 est le centre du triangle $M_2M_3M_4$.

b) En utilisant des rotations.



$$\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}=\frac{z_4-z_1}{z_3-z_1}=e^{\frac{2i\pi}{3}}\ ;$$

on en déduit que M_3 (resp. M_4) est l'image de M_2 (resp. M_3) par la rotation de centre M_1 d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

Le triangle $M_2M_3M_4$ est donc équilatéral de centre M_1

On peut également remarquer que les points M_2, M_3 et M_4 sont les images par la translation de vecteur d'affixe -1 de trois points dont les affixes sont les racines cubiques d'un même nombre, qui forment donc un triangle équilatéral de centre O. Le point M_1 étant l'image de O par la même translation, c'est le centre du triangle équilatéral $M_2M_3M_4$.