D.M. n°4	**ETUDE DE LA FONCTION *th***

On considère la fonction *th* (appelée **tangente hyperbolique**) définie par :

$$th(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}.$$

1. Justifier que *th* est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et que :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ th'(x)=1-\left(th(x)\right)^2$$

2. Montrer que l'on peut réduire l'étude de la fonction *th* sur $\mathbb{R}^+$, puis faire l'étude des variations de *th* et le calcul de sa limite en $+\infty$.

3. a) Justifier que la fonction *th* réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle *I* à déterminer. La bijection réciproque de *th* se note *Argth*.

b) Déterminer *Argth*(0)

4. Expliquer pourquoi *Argth* est dérivable sur *I*, et montrer que :

$$\forall x\in I,\ Argth'(x)=\frac{1}{1-x^2}.$$

5. a) Déterminer les réels *a* et *b* tels que :

$$\forall t\in I,\ \frac{1}{1-t^2}=\frac{a}{1-t}+\frac{b}{1+t}.$$

b) En déduire la forme explicite de *Argth*(*x*).

6. Retrouver le résultat précédent en résolvant pour $y\in I$ l'équation *th*(*x*) = *y*, d'inconnue *x*.