D.M. n°4	**ETUDE DE LA FONCTION *th***	**CORRECTION**

On considère la fonction *th* (appelée **tangente hyperbolique**) définie par :

$$th(x)=\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}.$$

1. Justifier que *th* est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et que :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ th'(x)=1-(th(x))^{2}$$

La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$, strictement positive.
Ainsi, $\forall x\in\mathbb{R},\ e^{x}+e^{-x}>0$, la fonction *th* est donc définie sur $\mathbb{R}$, et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme et quotient de fonctions dérivables.

$$\forall x\in\mathbb{R},\ th'(x)=\frac{\left(e^{x}+e^{-x}\right)^{2}-\left(e^{x}-e^{-x}\right)^{2}}{\left(e^{x}+e^{-x}\right)^{2}}=1-(th(x))^{2}$$

2. Montrer que l'on peut réduire l'étude de la fonction *th* sur $\mathbb{R}^{+}$, puis faire l'étude des variations de *th* et le calcul de sa limite en $+\infty$.

$\forall x\in\mathbb{R},\ th(-x)=\dfrac{e^{-x}-e^{x}}{e^{-x}+e^{x}}=-th(x)$, la fonction *th* est donc impaire.

On peut l'étudier sur $\mathbb{R}^{+}$.

$\forall x\in\mathbb{R},\ th'(x)=\dfrac{\left(e^{x}+e^{-x}\right)^{2}-\left(e^{x}-e^{-x}\right)^{2}}{\left(e^{x}+e^{-x}\right)^{2}}=\dfrac{4}{\left(e^{x}+e^{-x}\right)^{2}}>0$, la fonction *th* est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$\forall x\in\mathbb{R},\ th(x)=\dfrac{e^{x}\left(1-e^{-2x}\right)}{e^{x}\left(1+e^{-2x}\right)}=\dfrac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} th(x)=1$

3. a) Justifier que la fonction *th* réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle *I* à déterminer.
La bijection réciproque de *th* se note *Argth*.

La fonction *th* est continue, strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur *I* =]-1 ; 1[, d'après le théorème de bijection , elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur *I*.

b) Déterminer *Argth*(0). *th*(0) = 0, donc *Argth*(0) = 0

4. Expliquer pourquoi *Argth* est dérivable sur *I*, et montrer que :

$$\forall x\in I,\ Argth'(x)=\frac{1}{1-x^{2}}.$$

On a vu que : $\forall x\in]-1;1[,\ th'(Argth(x))=1-(th(Argth(x)))^{2}=1-x^{2}>0$

Argth est donc dérivable sur *I*, et $\forall x \in I,\ th'\left(Argth(x)\right) \times Argth\,'(x) = 1$, d'où :

$\left(1-\mathrm{x}^2\right) \times Argth\,'(\mathrm{x}) = 1$, ce qui donne : $\forall x \in I,\ \ Argth'(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$

5. a) Déterminer les réels *a* et *b* tels que :

$$\forall t \in I,\ \frac{1}{1-t^2} = \frac{a}{1-t} + \frac{b}{1+t} = \frac{1}{2(1-t)} + \frac{1}{2(1+t)}.$$

b) En déduire la forme explicite de *Argth*(*x*).

$\forall x \in I,\ \ Argth'(x) = \dfrac{1}{1-x^2} = \dfrac{1}{2(1-x)} + \dfrac{1}{2(1+x)}$;

On en déduit qu'il existe une constante C, telle que :

$\forall x \in I,\ \ Argth(x) = -\dfrac{1}{2} ln|1-x| + \dfrac{1}{2} ln|1+x| + C = ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}} + C$.

Comme *Argth*(0) = 0, on déduit que C = 0, et $\forall x \in I,\ \ Argth(x) = ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$

6. Retrouver le résultat précédent en résolvant pour $y \in I$ l'équation *th*(*x*) = *y*, d'inconnue *x*.

$\forall x \in \mathbb{R},\ \ th(x) = y \Leftrightarrow \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}} = y \Leftrightarrow \dfrac{\mathrm{e}^{-x}\left(\mathrm{e}^{2x}-1\right)}{\mathrm{e}^{-x}\left(\mathrm{e}^{2x}+1\right)} = y \Leftrightarrow \mathrm{e}^{2x} - 1 = y\left(\mathrm{e}^{2x}+1\right) \Leftrightarrow \mathrm{e}^{2x}(1-y) = 1+y$

Ainsi, $\forall y \in I,\ \mathrm{e}^{2x} = \dfrac{1+y}{1-y}$ d'où : $x = \dfrac{1}{2} ln\left(\dfrac{1+y}{1-y}\right)$.