1. Soit a un réel strictement positif tel que $a < 2$.

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \text{Arcsin}\left(\frac{ax}{1+x^2}\right)$$

a) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$, et justifier que l'on peut réduire le domaine d'étude de f à $[0;+\infty[$.

$$\left|\frac{ax}{1+x^2}\right| \leq 1 \Leftrightarrow a|x| \leq 1 + x^2 \Leftrightarrow 0 \leq 1 - a|x| + x^2;\ \Delta = a^2 - 4 < 0 \ \text{ car } \ 0 < a < 2$$

On en déduit que $\forall x \in \mathbb{R}, 1 - a|x| + x^2 > 0.$

f est donc définie (et dérivable) sur $\mathbb{R}$.

f étant impaire, on peut l'étudier sur $[0;+\infty[$.

b) Etudier les variations de f.

L'étude de la question précédente donne f dérivable sur son domaine.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \frac{a(1-x^2)}{(1+x^2)\sqrt{(1+x^2)^2 - a^2x^2}}$$

Ainsi, f est strictement croissante sur [0 ; 1] et strictement décroissante sur $[1;+\infty[$.

c) Calculer la limite de f en $+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{ax}{1+x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{ax}{x^2} = 0 \ \text{ donc } \ \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

d) Dresser le tableau de variations de f.

On rappelle que f est impaire.

X	$-\infty$		-1		0		1		$-\infty$
$f'(x)$		–		+		+		–	
f	0	↘	Arcsin(-a/2)	↗		↗	Arcsin(a/2)	↘	0

2. On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \text{Arcsin}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$$

a) Donner le domaine D de dérivabilité de f.

$\left|\frac{2x}{1+x^2}\right| < 1 \Leftrightarrow 2|x| < 1+x^2 \Leftrightarrow 0 < 1-2|x|+x^2 \Leftrightarrow 0 < (1-|x|)^2$ donc D = $\mathbb{R} \setminus \{-1;1\}$.

b) Dériver f sur D.

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1;1\},\ f'(x) = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)\sqrt{(1+x^2)^2-4x^2}} = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)\sqrt{(1-x^2)^2}}$$

$$= \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)|1-x^2|} = \begin{cases} \dfrac{2}{(1+x^2)} & \text{pour } -1 < x < 1 \\ \dfrac{-2}{(1+x^2)} & \text{pour } x < -1 \text{ et } 1 < x \end{cases}$$

c) En déduire une expression simplifiée de $f(x)$ sur son domaine de définition.

$$f(x) = \begin{cases} -2\text{Arc}\tan(x) + C_1 & \text{pour } 1 < x \\ 2\,\text{Arc}\tan(x) + C_2 & \text{pour } -1 < x \leq 1 \\ -2\text{Arc}\tan(x) + C_3 & \text{pour } x \leq -1 \end{cases}$$

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$; Arcsin(1) = $\frac{\pi}{2}$ et Arcsin(-1) = $-\frac{\pi}{2}$ donc :

$$f(x) = \begin{cases} -2\text{Arc}\tan(x) + \pi & \text{pour } 1 < x \\ 2\,\text{Arc}\tan(x) & \text{pour } -1 < x \leq 1 \\ -2\text{Arc}\tan(x) - \pi & \text{pour } x \leq -1 \end{cases}$$

d) Retrouver ce résultat en effectuant un changement de variable dans l'expression de $f(x)$ et en utilisant les propriétés des fonctions circulaires.

f étant impaire, on se place sur $[0;+\infty[$. On pose $x = \tan a$ avec $a \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right[$

$$f(\tan(a)) = \text{Arcsin}\left(\frac{2\tan(a)}{1+\tan^2(a)}\right) = \text{Arcsin}\left(\frac{2\sin(a)}{\cos(a)} \times \cos^2(a)\right) = \text{Arcsin}(\sin(2a))$$

On a donc : $f(\tan(a)) = \begin{cases} 2a & \text{pour } a \in \left[0;\frac{\pi}{4}\right] \\ \pi - 2a & \text{pour } a \in \left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right[\end{cases}$

Et par suite : $f(x) = \begin{cases} 2\,\text{Arc}\tan(x) & \text{pour } 0 \leq x \leq 1 \\ \pi - 2\text{Arc}\tan(x) & \text{pour } 1 < x \end{cases}$.

f étant impaire, on a de plus : $f(x) = -2\text{Arc}\tan(x) - \pi$ pour $x \leq -1$