D.M. n°6 RESOLUTION D'UNE EQUATION DIFFERENTIELLE

Le but de ce problème est de résoudre l'équation différentielle :

$$\sin(x)\, y'' + \cos(x)\, y' + 2\sin(x)\, y = 0 \quad (E_1)$$

On note $I_0 = \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$.

1. Montrer que : $\forall x \in I_0$, $\dfrac{1}{\cos^2 x \sin x} = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x} + \dfrac{\cos\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}} + \dfrac{\sin\frac{x}{2}}{2\cos\frac{x}{2}}$.

2. Résoudre dans I_0 l'équation différentielle :

$$\cos(x)\sin(x)\, y' + (\cos^2(x) - 2\sin^2(x))\, y = 0 \quad (E_2)$$

3. Montrer que $\varphi : x \mapsto \cos x$ est solution de (E_1).

4. On pose $y = z\varphi$.

Montrer que y est solution de (E_1) sur I_0 si et seulement si z' est solution de (E_2) sur I_0.

5. En déduire les solutions de (E_1) sur I_0.

6. Donner les solutions de (E_1) sur $\mathbb{R}$.