D.M. n°6 **RESOLUTION D'UNE EQUATION DIFFERENTIELLE** **CORRECTION**

Le but de ce problème est de résoudre l'équation différentielle :

$$\sin(x)\, y'' + \cos(x)\, y' + 2\sin(x)\, y = 0 \quad (E_1)$$

On note $I_0 = \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$.

1. Montrer que : $\forall x\in I_0,\ \dfrac{1}{\cos^2 x\sin x}=\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}+\dfrac{\cos\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}+\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{2\cos\frac{x}{2}}$.

$$\forall x\in I_0,\ \frac{\sin x}{\cos^2 x}+\frac{\cos\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}+\frac{\sin\frac{x}{2}}{2\cos\frac{x}{2}}=\frac{\sin x}{\cos^2 x}+\frac{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\frac{\sin x}{\cos^2 x}+\frac{1}{\sin x}$$

$$=\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\cos^2 x\sin x}=\frac{1}{\cos^2 x\sin x}$$

2. Résoudre dans I_0 l'équation différentielle :

$$\cos(x)\sin(x)\, y' + (\cos^2(x) - 2\sin^2(x))\, y = 0 \quad (E_2)$$

y est solution de (E_2) sur I_0 si, et seulement si :

$$\left(\forall x\in I_0, \cos(x)\sin(x)y'(x)+\left(\cos^2(x)-2\sin^2(x)\right)y(x)=0\right)$$

$$\Leftrightarrow\left(\forall x\in I_0, y'(x)+\left(\frac{\cos^2(x)-2\sin^2(x)}{\cos(x)\sin(x)}\right)y(x)=0\right)\Leftrightarrow\left(\forall x\in I_0, y'(x)+\left(\frac{\cos(x)}{\sin(x)}-2\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)y(x)=0\right)$$

$$\Leftrightarrow\left(\exists C\in\mathbb{R}\,/\,\forall x\in I_0, y(x)=Ce^{-\ln(\sin(x))-2\ln(\cos(x))}\right)\quad\left(\text{car sur } I_0\quad \cos(x)>0 \text{ et } \sin(x)>0\right)$$

$$\Leftrightarrow\left(\exists C\in\mathbb{R}\,/\,\forall x\in I_0, y(x)=\frac{C}{\cos^2(x)\sin(x)}\right)$$

3. Montrer que $\varphi : x\mapsto \cos x$ est solution de (E_1).

$$\forall x\in\mathbb{R}, \sin(x)\varphi''(x)+\cos(x)\varphi'(x)+2\sin(x)\varphi(x)=-\sin(x)\cos''(x)-\cos(x)\sin(x)+2\sin(x)\cos(x)=0$$

4. On pose $y=z\varphi$.

Montrer que y est solution de (E_1) sur I_0 si et seulement si z' est solution de (E_2) sur I_0.

y est solution de (E_1) sur I_0 si, et seulement si : $\forall x\in I_0$

$$\left(\sin(x)\left(z''(x)\varphi(x)+2z'(x)\varphi'(x)+z(x)\varphi''(x)\right)+\cos(x)\left(z'(x)\varphi(x)+z(x)\varphi'(x)\right)+2\sin(x)z(x)\varphi(x)=0\right)$$

$$\Leftrightarrow\left(\begin{array}{l}\sin(x)\varphi(x)z''(x)+\left(2\sin(x)\varphi'(x)+\cos(x)\varphi(x)\right)z'(x)\\ \qquad +\underbrace{\left(\sin(x)\varphi''(x)+\cos(x)\varphi'(x)+2\sin(x)\varphi(x)\right)}_{0}z(x)=0\end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow\left(\sin(x)\cos(x)z''(x)+\left(-2\sin^2(x)+\cos^2(x)\right)z'(x)=0\right)$$

$\Leftrightarrow$ z' est solution de (E_2) sur I_0.

5. En déduire les solutions de (E_1) sur I_0.

$y = z\varphi$ est solution de (E_1) sur I_0 si, et seulement si :

$$\left(\exists C \in \mathbb{R} / \forall x \in I_0, z'(x) = \frac{C}{\cos^2(x)\sin(x)} = C\left(\frac{\sin x}{\cos^2 x} + \frac{\cos\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}} + \frac{\sin\frac{x}{2}}{2\cos\frac{x}{2}}\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\exists C \in \mathbb{R}, \exists K \in \mathbb{R} / \forall x \in I_0, z(x) = C\left(\frac{1}{\cos x} + \ln\left(\sin\frac{x}{2}\right) - \ln\left(\cos\frac{x}{2}\right)\right) + K\right)$$

Les solutions de (E_1) sur I_0 sont donc les fonctions y telles que :

$$\exists C \in \mathbb{R}, \exists K \in \mathbb{R} / \forall x \in I_0, y(x) = C\left(1 + \cos x \ln\left(\tan\frac{x}{2}\right)\right) + K\cos x$$

6. Donner les solutions de (E_1) sur $\mathbb{R}$.

$\lim\limits_{x \to 0^+}\left(\cos x \ln\left(\tan\frac{x}{2}\right)\right) = -\infty$ donc les seules solutions de (E_1) sur I_0 qui se prolongent en 0 sont de la forme $K\varphi$ ou K est une constante ($C = 0$).

De plus, ces fonctions sont bien solutions de (E_1) sur $\mathbb{R}$.