D.M. n°7	THEOREME DE CESARO	CORRECTION

Etant donnée une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, on définit la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par :

$$\forall n\geq 1,\ c_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k\ ,$$

appelée **somme de Cesaro**.

I. Théorème de Cesaro :

Montrer que si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ admet une limite L dans $\overline{\mathbb{R}}$, alors $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ admet la même limite L.

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=L\in\mathbb{R}$: $\forall\varepsilon>0,\exists n_0\in\mathbb{N}^*,\forall n\in\mathbb{N}^*,(n\geq n_0)\Rightarrow|a_n-L|\leq\varepsilon$

$\forall n\geq n_0$, $\left|\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_n\right)-L\right|=\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(a_n-L)\right|\leq\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|a_n-L|\leq\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_0}|a_n-L|+\frac{1}{n}\sum_{k=n_0+1}^{n}|a_n-L|$

D'où : $|c_n-L|\leq\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_0}|a_k-L|+\frac{n-n_0}{n}\varepsilon\leq\frac{n_0}{n}\alpha+\frac{n-n_0}{n}\varepsilon\leq\frac{n_0}{n}\alpha+\varepsilon$ où $\alpha=\max\{|a_k-L|;k\in[\![1;n_0]\!]\}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n_0}{n}\alpha=0$, donc $\exists n_1\in\mathbb{N}^*,\forall n\in\mathbb{N}^*,(n\geq n_1)\Rightarrow\alpha\frac{n_0}{n}\leq\varepsilon$,

ainsi $\forall n\in\mathbb{N}^*,(n\geq\max(n_0,n_1))\Rightarrow|c_n-L|\leq 2\varepsilon$. On en déduit que $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers L.

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=+\infty$: $\forall M\in\mathbb{R},\exists n_0\in\mathbb{N}^*,\forall n\in\mathbb{N}^*,(n\geq n_0)\Rightarrow a_n\geq M$

$\forall n\geq n_0$, $c_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_0}a_n+\frac{1}{n}\sum_{k=n_0+1}^{n}a_n\geq\frac{n_0}{n}\beta+\frac{n-n_0}{n}M$, où $\beta=\min\{a_k,k\in[\![1;n_0]\!]\}$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{n_0}{n}\beta+\frac{n-n_0}{n}M\right)=M$, donc $\forall\varepsilon>0,\exists n_1\in\mathbb{N}^*,\forall n\in\mathbb{N}^*,(n\geq n_1)\Rightarrow\frac{n_0}{n}\beta+\frac{n-n_0}{n}M\geq M-\varepsilon$.

Ainsi, $\forall n\in\mathbb{N}^*,(n\geq\max(n_0,n_1))\Rightarrow c_n\geq M-\varepsilon$. On en déduit que $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge vers $+\infty$.

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=-\infty$, on considère la suite $(-a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et on applique le cas précédent.

II. Applications

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par :

$$u_0>0 \text{ et } u_{n+1}=\sqrt{\sum_{k=0}^{n}u_k}$$

Remarque : Une récurrence immédiate montre que $\forall n\in\mathbb{N},u_n>0$ (ce qui garantit l'existence de la suite !).

a) Déterminer la fonction f telle que :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_{n+1}=f(u_n)$$

On a : $\forall n\in\mathbb{N}^*,u_{n+1}^2=\sum_{k=0}^{n}u_k=u_n+\sum_{k=0}^{n-1}u_k=u_n+u_n^2$, d'où : $\forall n\in\mathbb{N}^*,u_{n+1}=\sqrt{u_n+u_n^2}$

La fonction f recherchée est donc définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x)=\sqrt{x^2+x}$.

b) Etudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

$\forall n\in\mathbb{N}^*, u_{n+1}-u_n=\sqrt{u_n+u_n^2}-u_n=\dfrac{u_n+u_n^2-u_n^2}{\sqrt{u_n+u_n^2}+u_n}=\dfrac{u_n}{\sqrt{u_n+u_n^2}+u_n}>0$ car $\forall n\in\mathbb{N}, u_n>0$.

On en déduit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Si elle convergeait, comme f est continue, sa limite L vérifierait $f(L)=L$, donc $L=0$.

Or la suite est croissante et strictement positive ($\forall n\in\mathbb{N}^*, u_n>u_1>0$), c'est donc impossible.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et n'a pas de limite finie, elle diverge donc vers $+\infty$.

c) En appliquant le théorème de Cesaro à la suite de terme général $a_n=u_{n+1}-u_n$, déterminer la limite de $\dfrac{u_n}{n}$.

On a : $\forall n\in\mathbb{N}^*, u_{n+1}-u_n=\dfrac{u_n}{\sqrt{u_n+u_n^2}+u_n}$, donc

$$\lim_{n\to+\infty} a_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{\sqrt{u_n+u_n^2}+u_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{u_n\left(1+\sqrt{\frac{1}{u_n}+1}\right)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{1+\sqrt{\frac{1}{u_n}+1}}=\frac{1}{2}\ \text{car}\ \lim_{n\to+\infty}u_n=+\infty.$$

$$\forall n\geq 1,\ c_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{u_{n+1}}{n}-\frac{u_1}{n}=\frac{n+1}{n}\times\frac{u_{n+1}}{n+1}-\frac{u_1}{n}\ ;\ \lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{n}=1\ \text{et}\ \lim_{n\to+\infty}-\frac{u_1}{n}=0.$$

donc d'après le théorème de Cesaro : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{n}=\frac{1}{2}$

2. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par : $v_0=1$ et $v_{n+1}=v_n\dfrac{1+2v_n}{1+3v_n}$

a) Etudier la convergence de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Une récurrence immédiate montre que $\forall n\in\mathbb{N}, v_n>0$.

On a donc : $\forall n\in\mathbb{N}, 0<1+2v_n<1+3v_n$ d'où : $\forall n\in\mathbb{N}, 0<\dfrac{v_{n+1}}{v_n}=\dfrac{1+2v_n}{1+3v_n}<1$;

On en déduit que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante, minorée par 0.

Elle converge donc vers un réel L tel que $L=L\dfrac{1+2L}{1+3L}$ (car $x\mapsto x\dfrac{1+2x}{1+3x}$ continue sur $[0;+\infty[$).

On trouve $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}v_n=0$.

b) Après avoir justifié que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas (déjà dit), appliquer le théorème de Cesaro à la suite de terme général $a_n=\dfrac{1}{v_{n+1}}-\dfrac{1}{v_n}$ pour déterminer la limite de (nv_n).

$$\forall n\in\mathbb{N}, a_n=\frac{1}{v_n}\left(\frac{1+3v_n}{1+2v_n}-1\right)=\frac{1}{v_n}\left(\frac{1+3v_n-1-2v_n}{1+2v_n}\right)=\frac{1}{1+2v_n},\ \text{donc}\ \lim_{n\to+\infty}a_n=1.$$

$$\forall n\geq 1,\ c_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{1}{nv_{n+1}}-\frac{1}{nv_1}=\frac{n+1}{n}\times\frac{1}{(n+1)v_{n+1}}-\frac{1}{nv_1}$$

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{n}=1$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{nv_1}=0$ donc d'après le théorème de Cesaro : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{nv_n}=1$ et par suite :

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty}nv_n=1$.