D.M. n°8	ETUDE DE SUITES	Correction

Soient a et b des réels tels que : $0 \le a < b \le 1$.

1. Soit $M = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-b & b \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

a) Montrer qu'il existe deux suites réelles $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :

$\forall n \in \mathbb{N}, M^n = a_n M + b_n I_2$.

Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \exists (a_n ; b_n) \in \mathbb{R}^2, M^n = a_n M + b_n I_2$

pour $n = 0$, on a : $M^0 = 0 \times M + 1 \times I_2$; $a_0 = 0$, $b_0 = 1$;

pour $n = 1$, on a : $M^1 = 1 \times M + 0 \times I_2$; $a_1 = 1$, $b_1 = 0$;

pour $n = 2$, on a : $M^2 = (a + b)\, M + (1 - a - b)\, I_2$; $a_2 = a + b$, $b_2 = 1 - a - b$.

Soit $n \ge 2$, on suppose que : $\exists (a_n ; b_n) \in \mathbb{R}^2, M^n = a_n M + b_n I_2$, on a alors :

$$M^{n+1} = (a_n M + b_n I_2) M = a_n M^2 + b_n M = a_n \left((a+b) M + (1-a-b) I_2 \right) + b_n M$$
$$= \left(a_n (a+b) + b_n \right) M + a_n (1-a-b) I_2$$

Ainsi, en notant $a_{n+1} = a_n (a+b) + b_n$ et $b_{n+1} = a_n (1-a-b)$, on a la propriété pour n+1.

Par principe de récurrence, on a la propriété pour tout entier n.

b) Déterminer a_n et b_n.

Les suites (a_n) et (b_b) sont telles que : $a_0 = 0,\ b_0 = 1,\ \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} a_{n+1} = (a+b) a_n + b_n \\ b_{n+1} = (1-a-b) a_n \end{cases}$.

On a donc : $a_0 = 0,\ a_1 = 1,\ \forall n \in \mathbb{N}, a_{n+2} = (a+b) a_{n+1} + (1-a-b) a_n$;

La suite (a_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique :

$r^2 - (a + b)\, r + (a + b - 1) = 0$.

Le discriminant est $\Delta = (a+b)^2 - 4(a+b-1) = (a+b)^2 - 4(a+b) + 4 = (a+b-2)^2$;

les solutions de l'équation caractéristique sont : 1 et $a + b - 1$.

L'hypothèse $0 \le a < b \le 1$ donne $-1 < a + b - 1 < 1$, ce qui assure que les deux solutions sont distinctes.

Pour tout n de $\mathbb{N}$, a_n s'écrit donc : $a_n = \lambda + \mu (a+b-1)^n$.

Finalement, compte tenu des premiers termes, on obtient :

$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \dfrac{1}{2-a-b}\left(1-(a+b-1)^n\right)$ et par suite : $\forall n \in \mathbb{N}, b_n = \dfrac{1}{2-a-b}\left((a+b-1)^n - (a+b-1)\right)$

2. On considère les suites définies par : $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} u_{n+1} = au_n + (1-a)v_n \\ v_{n+1} = (1-b)u_n + bv_n \end{cases}$.

a) Donner la forme explicite de u_n et v_n.

Si on note $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$, l'énoncé donne : $U_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = \mathrm{M}U_n$ (où M est la matrice étudiée à la question **1**).

Une récurrence immédiate donne : $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = \mathrm{M}^n U_0$.

La question **1** a donné : $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{M}^n = \frac{1}{2-a-b}\left(\left(1-(a+b-1)^n\right)\mathrm{M} + \left((a+b-1)^n - (a+b-1)\right)I_2\right)$$

$$= \frac{1}{2-a-b}\left(\left(1-(a+b-1)^n\right)\begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-b & b \end{pmatrix} + \left((a+b-1)^n - (a+b-1)\right)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$= \frac{1}{2-a-b}\begin{pmatrix} (a+b-1)^n(1-a)+1-b & \left(1-(a+b-1)^n\right)(1-a) \\ \left(1-(a+b-1)^n\right)(1-b) & (a+b-1)^n(1-b)+1-a \end{pmatrix}$$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_n = \dfrac{1}{2-a-b}\left((a+b-1)^n(1-a)(u_0-v_0) + (1-b)u_0 + (1-a)v_0\right) \\ v_n = \dfrac{1}{2-a-b}\left((a+b-1)^n(1-b)(v_0-u_0) + (1-b)u_0 + (1-a)v_0\right) \end{cases}$

b) Etudier la convergence des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

On a : $0 \le a < b \le 1$, donc $-1 < a+b-1 < 1$.

La limite des suites géométriques donne $\lim\limits_{n\to+\infty}(a+b-1)^n = 0$, et par suite :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = \frac{1}{2-a-b}\left((1-b)u_0 + (1-a)v_0\right)$$