D.M. n°9 **FONCTIONS CONVEXES**

Définition : *Une fonction f définie sur un intervalle I est dite* ***convexe*** *si :*

$\forall (a ; b) \in I^2$, $\forall \lambda \in [0 ; 1]$, $f(\lambda a + (1 - \lambda)b) \leqslant \lambda f(a) + (1 - \lambda) f(b)$.

f est dite ***concave*** *si (–f) est convexe.*

1. Montrer que que f définie sur un intervalle I est convexe si et seulement si :

$\forall (x ; y) \in I^2$, $\forall (\lambda_1 ; \lambda_2) \in ([0 ; 1])^2$ tels que $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, $f(\lambda_1 x + \lambda_2 y) \leqslant \lambda_1 f(x) + \lambda_2 f(y)$

2. Soient $f \in \mathbb{R}^I$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère.
Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

eq
(1) f est convexe sur I.
(2) La partie *Epi f* du plan située au dessus de $\mathcal{C}$ (**épigraphe** de f) est convexe
(i.e. $\forall (A ; B) \in$ *Epi f*, le segment $[AB] \subset$ *Epi f*)
(3) Tout arc de $\mathcal{C}$ est sous sa corde.

3. Montrer que f est convexe sur I si et seulement si pour tout $a \in I$, la fonction $x \mapsto \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est croissante sur tout intervalle de $I \setminus \{a\}$.

4. Soient $f \in D(I, \mathbb{R})$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère.
a) Montrer que f est convexe sur I si et seulement si f ' est croissante sur I.
b) Montrer que f est convexe sur I si et seulement si $\mathcal{C}$ est au dessus de chaque tangente c'est-à-dire : $\forall (x;a) \in I^2, f(x) \geq f(a) + f'(a)(x-a)$.

5. Etudier la convexité des fonctions f, g, h telles que $f(x) = e^x$; $g(x) = \ln x$; $h(x) = x^3$

6. En utilisant la notion de convexité, montrer que $\forall x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, on a : $\frac{2}{\pi} x \leq \sin(x) \leq x$.

7. Soient f une fonction convexe sur un intervalle I, et n un entier supérieur à 2.
Montrer que pour $(x_i)_{1\leq i\leq n} \in I^n, (\lambda_i)_{1\leq i\leq n} \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^n$ tels que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, on a :

$f(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$. *(Cette inégalité s'appelle inégalité de Jensen).*

8. Comparaison des moyennes (arithmétique, géométrique, harmonique) :
Soient $a_i > 0$ pour $i \in \{1,2, ...,n\}$. On note : $A = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i$; $G = \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}$ et $\frac{1}{H} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}$

Montrer que : $H \leq G \leq A$.