D.M. n°9 **FONCTIONS CONVEXES** **Correction**

1. Il suffit de prendre $\lambda = \lambda_1$ et $1-\lambda = \lambda_2$.

2. (1) $\Rightarrow$(2) : Supposons f convexe

Soient M(x ; y) et M'(x' ; y') des points de E = *Epi f* avec x < x' , y $\geqslant$f(x) et y'$\geqslant$ f(x')

f convexe $\Rightarrow$ $\forall$t $\in$[0 ; 1], f(tx + (1 – t) x') $\leqslant$ tf(x) + (1 – t)f(x') $\leqslant$ ty + (1 – t)y'.

Donc (tx + (1 – t) x' ; ty + (1 – t)y') $\in$ E, donc E convexe.

(2) $\Rightarrow$(1) : Supposons *Epi f* convexe

Soient M(x ; f(x)) et M'(x' ;f(x')) des points de $\mathscr{C}$ et de E = *Epi f* .

E convexe $\Rightarrow$ $\forall$t $\in$[0 ; 1], f(tx + (1 – t) x') $\leqslant$ tf(x) + (1 – t)f(x') donc f convexe.

(2) $\Leftrightarrow$ (3) : Trivial (les points de la courbe sont dans E).

3. Soient (a ; b ; c) $\in$ I^3 avec a < b $\leqslant$ c. Soit t = (b – a)/(c – a). Alors b = (1 – t)a + tc.

f convexe $\Leftrightarrow$ f(b) $\leqslant$ (1 – t) f(a) + t f(c) $\Leftrightarrow$ (f(b) – f(a)) $\leqslant$ t (f(c) – f(a)).

4. a) Si f est convexe, soient a < x < b.

Par croissance de : $x \mapsto \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ et $x \mapsto \dfrac{f(b)-f(x)}{b-x}$

On a : $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \le \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \le \dfrac{f(b)-f(x)}{b-x}$

Par passage à la limite : f'(a) $\leqslant \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant$ f'(b) donc f' est croissante.

Réciproquement, si f ' est croissante, pour (a ; b ; c) $\in$ I^3 avec a < b < c :

Le TAF donne u$\in$]a ; b[et v$\in$]b ; c[tels que : $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(u)$ et $\dfrac{f(c)-f(b)}{c-b} = f'(v)$

Donc, comme f ' croissante et u < v : $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \le \dfrac{f(c)-f(b)}{c-b}$ ce qui équivaut à

(a – b) f(c) + (b – c) f(a) + (c – a) f(b) ≤ 0 ce qui équivaut à $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \le \dfrac{f(c)-f(a)}{c-a}$

La fonction $x \mapsto \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est donc croissante (de même pour les autres)

<u>Autre démonstration</u> :

Soit g définie sur I\{a} par : $g(x)=\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$

g dérivable car f l'est et $\forall x \in I\setminus\{a\}$, $g'(x)=\dfrac{f'(x)-\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}}{x-a}$

On suppose a < x (démonstration identique si x < a)

Le TAF donne : $\exists c \in]a;x[$, $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(c)$ donc $g'(x)=\dfrac{f'(x)-f'(c)}{x-a}$

par croissance de f ', g'(x) $\geq$ 0.

b) Si f convexe. Soient a < a + h < x : $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} \leq \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$

Par passage à la limite : $f'(a) \leqslant \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ donc $f(x) \geqslant f'(a)(x-a)+f(a)$.

Soient x < a + h < a : $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} \geq \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$

Par passage à la limite : $f'(a) \geqslant \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ donc $f(x) \geqslant f'(a)(x-a)+f(a)$.

Réciproquement, si $\mathcal{C}$ est au dessus de chaque tangente :

pour $(a\,;b) \in I^2$ avec a < b : $f(b) \geqslant f(a)+f'(a)(b-a)$ donc $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \geq f'(a)$

et $f(a) \geqslant f(b)+f'(b)(a-b)$ donc $\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b} \leq f'(b)$

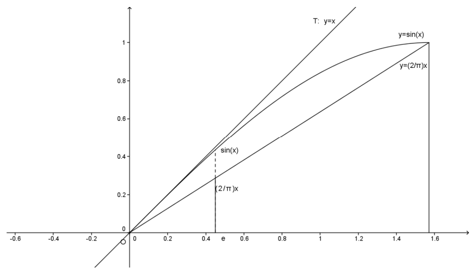
On a donc $f'(a) \leqslant f'(b)$ donc f ' est croissante, donc d'après a) f est convexe.

5. f convexe ; g concave ; h convexe sur $\mathbb{R}^+$, concave sur $\mathbb{R}^-$

6. La fonction sin est concave sur $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

$\dfrac{2}{\pi}x \leq \sin x$, car la courbe est au dessus de la corde

$\sin x \leq x$, car la tangente en O est au dessus de la courbe



7. Pour tout entier $n \geq 2$, on note H(n) :

« $\forall (x_i)_{1\leq i\leq n} \in I^n, (\lambda_i)_{1\leq i\leq n} \in (\mathbb{R}_+^*)^n, \left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i = 1\right) \Rightarrow \left(f(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i) \leq \sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i)\right)$ ».

Initialisation : pour n = 2, l'inégalité a été démontrée à la question 1.

Hérédité. Soit $n \geq 2$, on suppose H(n) vraie. Soient $(x_i)_{1\leq i\leq n+1} \in I^{n+1}, (\lambda_i)_{1\leq i\leq n+1} \in (\mathbb{R}_+^*)^{n+1}$ avec $\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i = 1$

. On note $\lambda_0 = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i$ et $y = \sum_{i=1}^{n}\dfrac{\lambda_i}{\lambda_0}x_i$.

Alors : $f\left(\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i x_i\right) = f\left(\lambda_0 y + (1-\lambda_0)x_{n+1}\right) \leq \lambda_0 f(y) + (1-\lambda_0) f(x_{n+1})$

D'après l'hypothèse de récurrence, comme $\sum_{i=1}^{n}\dfrac{\lambda_i}{\lambda_0} = 1$, $f(y) = f\left(\sum_{i=1}^{n}\dfrac{\lambda_i}{\lambda_0}x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n}\dfrac{\lambda_i}{\lambda_0}f(x_i)$.

Finalement, on a : $f\left(\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1})$

La propriété H(n) est vraie pour n = 2, elle est héréditaire pour tout entier $n \geq 2$, elle est donc vraie pour tout entier $n \geq 2$, par principe de récurrence.

8. La fonction ln est concave. Avec, $\forall i \in [\![1;n]\!]$, $\lambda_i = \dfrac{1}{n}$, on a :

ln(G) = $\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln(a_i) \leq \ln\left(\sum_{i=1}^{n}\dfrac{a_i}{n}\right)$ donc $G \leq A$.

de plus : $\ln\left(\dfrac{1}{G}\right) = -\ln(G) = -\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln(a_i) = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln\left(\dfrac{1}{a_i}\right) \leq \ln\left(\sum_{i=1}^{n}\dfrac{1}{na_i}\right)$ donc $\dfrac{1}{G} \leq \dfrac{1}{H}$.