D.M. n°10 GEOMETRIE ET NOMBRES COMPLEXES

Pour l'ensemble du problème, on se place dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$.

1ère PARTIE Préliminaires

Soit IJK un triangle équilatéral direct non réduit à un point.
Soit (Γ) le cercle circonscrit au triangle IJK. On note $\overset{\frown}{IJ}$ l'arc du cercle (Γ) d'extrémités I et J incluses, ne contenant pas le point K. On note r_1 la rotation de centre I qui transforme J en K.
Soient M un point quelconque du plan, et $M_1 = r_1(M)$.

1. a) Montrer que $MI + MJ = MM_1 + M_1K$.

b) En déduire que $MI + MJ \geqslant MK$.

2. a) Démontrer que $MI + MJ = MK$ si et seulement si M_1 appartient au segment [MK].

b) Démontrer que $MI + MJ = MK$ si et seulement si M appartient à $\overset{\frown}{IJ}$.

2ème PARTIE

Soient a, b et c trois réels strictement positifs, et A, B et C les points du plan d'affixes respectives : -a, b, et ic.
On suppose que la mesure principale de l'angle orienté $(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB})$ appartient à l'intervalle $\left]0;\frac{2\pi}{3}\right[$.

On note j le nombre complexe : $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

Soient A', B' et C' les points du plan tels que CBA', ACB' et BAC' soient des triangles équilatéraux directs.
On note ω, ω' et ω'' les affixes respectives des vecteurs $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$, et $\overrightarrow{CC'}$.

1. a) Calculer $1 + j + j^2$.

b) Démontrer que $\omega = a - j^2 b - j\,ic$.

c) Démontrer que $\omega' = j\omega$ et $\omega'' = j^2\omega$.

d) Justifier que $(\overrightarrow{AA'};\overrightarrow{BB'}) = \frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$, et que AA' = BB' = CC'.

2. a) Démontrer que toute droite passant par un point M_0 d'affixe z_0 admet une équation complexe de la forme :
$u(\bar{z} - \bar{z_0}) - \bar{u}(z - z_0) = 0$, où $u \in \mathbb{C}$.

b) Démontrer que les droites (AA'), (BB') et (CC') admettent pour équations respectives :

$$\omega(\bar{z} + a) - \bar{\omega}(z + a) = 0$$
$$\omega j(\bar{z} - b) - \bar{\omega} j^2 (z - b) = 0$$
$$\omega j^2 (\bar{z} + ic) - \bar{\omega} j(z - ic) = 0$$

c) Démontrer que les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes en un point F.

T.S.V.P.

$3^{\text{ème}}$ PARTIE

On admet que le point F est situé à l’intérieur du triangle ABC.

1. a) Démontrer que $\left(\overrightarrow{FB};\overrightarrow{FA'}\right)=\frac{\pi}{3}\,[2\pi]$.

b) En déduire que le point F appartient au cercle circonscrit au triangle CBA’.

Dans la suite, on pourra utiliser les résultats établis dans les préliminaires.

2. Soit f l’application définie pour tout point M du plan par f(M) = MA + MB + MC.

a) Démontrer que f(F) = AA’.

b) Démontrer que pour tout point M du plan f(M) ⩾ AA’, puis que si M n’appartient pas à la droite (AA’) alors f(M) > AA’.

c) En déduire que, pour tout point M du plan distinct de F, f(M) > AA’.

3. Démontrer que f admet un minimum, atteint en un seul point du plan.