D.M. n°10 GEOMETRIE ET NOMBRES COMPLEXES Correction

1ère PARTIE

1. a) Le triangle IJK étant équilatéral direct, la rotation r_1 de centre I a pour angle $\frac{\pi}{3}$.

Le triangle IMM_1 est donc un triangle équilatéral donc $MI = MM_1$.
De plus, par conservation des longueurs par une rotation, on a : $MJ = M_1K$.
On a donc : $MI + MJ = MM_1 + M_1K$.

b) L'inégalité triangulaire dans le triangle MM_1K donne : $MM_1 + M_1K \geqslant MK$.
Avec le résultat précédent, on a : $MI + MJ \geqslant MK$.

2. a) Le résultat demandé est le cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire.

b) On a vu que $MI + MJ = MK$, si et seulement si $M_1 \in [MK]$ ce qui équivaut à :

$\left(\overrightarrow{MI};\overrightarrow{MM_1}\right) = \left(\overrightarrow{MI};\overrightarrow{MK}\right) = \frac{\pi}{3}\,[2\pi]$ donc à : $\left(\overrightarrow{MI};\overrightarrow{MK}\right) = \left(\overrightarrow{JI};\overrightarrow{JK}\right)[2\pi]$

D'après le théorème de l'angle inscrit, ce dernier résultat équivaut à M appartient à $\overset{\frown}{IJ}$

2ème PARTIE

1. a) j est une racine 3ième de l'unité. On a donc : $1 + j + j^2 = 0$.

REMARQUE **:** on a également :

(i) $j^3 = 1$.

(ii) $1 + j = - j^2 = e^{i\frac{\pi}{3}}$.

(iii) $\overline{j} = j^2$.

b) Par construction de A' son affixe est : $ic + e^{i\frac{\pi}{3}}(b - ic)$.

On a donc : $\omega = ic + e^{i\frac{\pi}{3}}(b - ic) + a = a + ic\left(\underbrace{1 - e^{i\frac{\pi}{3}}}_{-j}\right) + b\,e^{i\frac{\pi}{3}} = a - icj - j^2b$.

c) On a: $\omega' = -a + e^{i\frac{\pi}{3}}(ic + a) - b = a\left(\underbrace{e^{i\frac{\pi}{3}} - 1}_{j}\right) + ci\,e^{i\frac{\pi}{3}} + b = aj - icj^2 - j^3b$. On en déduit que $\omega' = j\omega$.

L'autre démonstration est similaire.

d) On a : $\left(\overrightarrow{AA'};\overrightarrow{BB'}\right) = \arg\left(\frac{\omega'}{\omega}\right) = \arg(j) = \frac{2\pi}{3}\,[2\pi]$.

D'après la question précédente, j étant un nombre complexe de module 1, on a : $|\omega| = |\omega'| = |\omega''|$ donc
AA' = BB' = CC'.

2. a) Un point M d'affixe z appartient à la droite passant par M_0 d'affixe z_0 et de vecteur directeur $\overrightarrow{u_0}$ d'affixe u si et seulement si $\overrightarrow{MM_0}$ et $\overrightarrow{u_0}$ sont colinéaires, ce qui équivaut à $\frac{z-z_0}{u}=\overline{\left(\frac{z-z_0}{u}\right)}$ ce qui équivaut à

$u\left(\overline{z}-\overline{z_0}\right)-\overline{u}\left(z-z_0\right)=0.$

b) Dans la forme précédente, pour la droite (AA'), on prend : u = ω et z_0 = -a ;
Pour la droite (BB'), on prend : u = ω' = ωj et z_0 = b ;
Pour la droite (CC'), on prend u = ω'' = j²ω et z_0 = ic.
On obtient :

$(AA'):\quad \omega\left(\overline{z}+a\right)-\overline{\omega}\left(z+a\right)=0 \qquad (i)$

$(BB'):\quad \omega j\left(\overline{z}-b\right)-\overline{\omega}j^2\left(z-b\right)=0 \quad (ii)$

$(CC'):\quad \omega j^2\left(\overline{z}+ic\right)-\overline{\omega}j\left(z-ic\right)=0\ (iii)$

c) On a : $\left(\overrightarrow{AA'};\overrightarrow{BB'}\right)=\frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$, donc (AA') et (BB') ne sont pas parallèles.

On appelle F d'affixe z_F leur point d'intersection.

En sommant termes à termes les premiers membres des égalités (i), (ii) et (iii) avec z = z_F, on obtient :

$\omega\left(\overline{z_F}+a\right)-\overline{\omega}\left(z_F+a\right)+\omega j\left(\overline{z_F}-b\right)-\overline{\omega}j^2\left(z_F-b\right)+\omega j^2\left(\overline{z_F}+ic\right)-\overline{\omega}j\left(z_F-ic\right)=$

$\omega\overline{z_F}\left(\underbrace{1+j+j^2}_{0}\right)+\omega a-\omega jb+\omega j^2ic-\overline{\omega}\,z_F\left(\underbrace{1+j^2+j}_{0}\right)-\overline{\omega}a+\overline{\omega}j^2b+\overline{\omega}jic=\ \omega\left(\underbrace{a-jb+j^2ic}_{\overline{\omega}}\right)-\overline{\omega}\left(\underbrace{a-j^2b-jic}_{\omega}\right)=0\,.$

Comme z_F vérifie (i) et (ii), on en déduit qu'il vérifie (iii).

3ème PARTIE

1. a) $\left(\overrightarrow{FB};\overrightarrow{FA'}\right)=\left(\overrightarrow{B'B};\overrightarrow{AA'}\right)=\pi+\left(\overrightarrow{BB'};\overrightarrow{AA'}\right)=\pi-\frac{2\pi}{3}=\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$

b) $\left(\overrightarrow{FB};\overrightarrow{FA'}\right)=\left(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CA'}\right)\ [2\pi]$ donc d'après le théorème de l'angle inscrit, F appartient au cercle circonscrit au triangle CBA', plus précisément, $F\in\overset{\frown}{BC}$.

2. a) D'après les préliminaires, on a : FB + FC = FA' donc FA + FB + FC = FA + FA' = AA' (car F∈[AA']).

b) Pour tout point M du plan, d'après les préliminaires, MB + MC ⩾ MA' donc f(M) ⩾ MA + MA' ⩾ AA', la dernière inégalité étant stricte si M∉ [AA'].

c) On a vu à la question précédente, que si M∉ [AA'], alors f(M) > AA'.
Si M ∈ [AA']\{F}, alors M ∉ (BB') donc MA + MB + MC ⩾ MB + MB' > BB' comme BB' = AA', on a le résultat.

3. On a montré que f(F) = AA', puis que pour tout point M du plan distinct de F, f(M) > AA'.
Cela signifie que f admet AA' pour minimum atteint uniquement en F.