D.M. n°11 POLYNÔMES

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et P_n le polynôme défini par : $P_n = \dfrac{1}{2i}\left[(X + iX^0)^{2n+1} - (X - iX^0)^{2n+1}\right]$

1) a) Déterminer les racines du polynôme $(X^{2n+1} - X^0) \in \mathbb{C}[X]$.

b) En déduire que les racines de P_n sont les nombres :

$$\xi_k = \text{cotan}\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) \quad \text{où } k \in [\![-n;n]\!] \setminus \{0\}$$

(où cotan $x = \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$ pour $x \in \displaystyle\bigcup_{p\in\mathbb{Z}} \left]p\pi;(p+1)\pi\right[$)

2) Montrer que $P_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k+1} (-1)^k X^{2(n-k)}$.

3) Donner la factorisation dans $\mathbb{R}[X]$ du polynôme $Q_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P_n(X) = Q_n(X^2)$.

4) a) Calculer la somme S_n définie par $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \text{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$

b) Soit $\theta \in \left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$, exprimer $\dfrac{1}{\sin^2\theta}$ en fonction de cotan θ.

c) Calculer la somme T_n définie par $T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}$.

5) Prouver les inégalités suivantes : $\forall x \in \left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$, $\text{cotan}^2(x) \leq \dfrac{1}{x^2} \leq \dfrac{1}{\sin^2 x}$

6) Déduire de ce qui précède que la suite $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et calculer sa limite.