Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et P_n le polynôme défini par : $P_n = \dfrac{1}{2i}[(X + iX^0)^{2n+1} - (X - iX^0)^{2n+1}]$

1) a) Déterminer les racines du polynôme $(X^{2n+1} - X^0) \in \mathbb{C}[X]$.

Ce sont les racines $(2n+1)$ -ième de l'unité : $\left\{ e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}} ; k \in [\![-n;n]\!] \right\}$

b) En déduire que les racines de P_n sont les nombres :

$\xi_k = \operatorname{cotan}\left(\dfrac{k\pi}{2n+1}\right)$ où $k \in [\![-n;n]\!] \setminus \{0\}$ (où $\operatorname{cotan} x = \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$ pour $x \in \bigcup_{p\in\mathbb{Z}}]p\pi;(p+1)\pi[$)

On remarque que i n'est pas racine de P_n, donc :

$$P_n(x) = 0 \Leftrightarrow (x+i)^{2n+1} = (x-i)^{2n+1} \Leftrightarrow \left(\frac{x+i}{x-i}\right)^{2n+1} = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{x+i}{x-i} = e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}}, k \in [\![-n;n]\!]\right);$$

A ce stade, on remarque que pour $k = 0$, l'égalité est impossible. On a donc :

$$P_n(x) = 0 \Leftrightarrow \left(x = \frac{i\left(e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}} + 1\right)}{e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}} - 1} = \frac{ie^{\frac{ik\pi}{2n+1}} 2\cos\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}{e^{\frac{ik\pi}{2n+1}} 2i\sin\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} = \xi_k, k \in [\![-n;n]\!] \setminus \{0\} \right).$$

2) Montrer que $P_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k+1} (-1)^k X^{2(n-k)}$.

La formule du binôme de Newton donne :

$$P_n = \frac{1}{2i} \sum_{t=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{t} i^t \underbrace{\left(1 + (-1)^{t+1}\right)}_{\text{nul pour } t \text{ pair}} X^{2n+1-t} \underset{t=2k+1}{\underbrace{=}} \frac{1}{2i} \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k+1} (i)^{2k+1} \times 2 \times X^{2(n-k)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k+1} (-1)^k X^{2(n-k)}$$

On remarque que P_n est un polynôme pair, de degré $2n$, de coefficient dominant $2n+1$.

3) Donner la factorisation dans $\mathbb{R}[X]$ du polynôme $Q_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P_n(X) = Q_n(X^2)$.

Q_n a pour racines $\xi_k^{\,2}, k \in [\![-n;n]\!] \setminus \{0\}$, il est de degré n (car P_n est de degré $2n$), de même coefficient dominant que P_n. On a donc : $Q_n = (2n+1) \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(X - \xi_k^{\,2}\right)$

4) a) Calculer la somme S_n définie par $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$

On a : $Q_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k+1} (-1)^k X^{n-k} = (2n+1) \prod_{k=1}^{n} \left(X - \xi_k^{\,2}\right)$; ainsi, en utilisant la relation qui lie la somme des racines d'un polynôme avec ses coefficients, on obtient :

$$S_n = -\frac{\binom{2n+1}{3} \times (-1)}{2n+1} = \frac{n(2n-1)}{3}$$

b) Soit $\theta \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$, exprimer $\dfrac{1}{\sin^2\theta}$ en fonction de cotan θ.

$$\frac{1}{\sin^2\theta}=\frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\sin^2\theta}=\text{cotan}^2\theta+1$$

c) Calculer la somme T_n définie par $T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}$.

$$T_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\text{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)+1\right)=S_n+n=\frac{2n(n+1)}{3}$$

5) Prouver les inégalités suivantes : $\forall x\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$, $\text{cotan}^2(x)\le\dfrac{1}{x^2}\le\dfrac{1}{\sin^2 x}$

Soit $a\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$. La fonction sinus (resp. tangente) est continue sur $[0;a]$, dérivable sur $]0;a[$ de dérivée $x\mapsto\cos x$ (resp. $x\mapsto 1+\tan^2 x$). Le théorème des accroissements finis donne :

$\forall x\in[0;a]$, $\exists b\in\,]0;x[$, $\sin x-\sin 0=\underbrace{\cos b}_{\in]0;1[}(x-0)\le x$, et

$\forall x\in[0;a]$, $\exists c\in\,]0;x[$, $\tan x-\tan 0=\underbrace{(1+\tan^2 c)}_{\ge 1}(x-0)\ge x$.

Ainsi, $\forall x\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$, $\tan x\ge x\ge\sin x>0$; donc, la fonction $x\mapsto\dfrac{1}{x^2}$ étant décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on a : $\forall x\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$, $\dfrac{1}{\tan^2 x}\le\dfrac{1}{x^2}\le\dfrac{1}{\sin^2 x}$, ou encore $\forall x\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$, $\text{cotan}^2 x\le\dfrac{1}{x^2}\le\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

6) Déduire de ce qui précède que la suite $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et calculer sa limite.

$\forall k\in[\![1;n]\!]$, $\dfrac{k\pi}{2n+1}\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$, donc, d'après la question précédente :

$$\forall k\in[\![1;n]\!],\text{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\le\left(\frac{2n+1}{k\pi}\right)^2\le\frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}$$

Donc, en sommant pour toutes les valeurs de k dans $[\![1;n]\!]$:

$$S_n\le\left(\frac{2n+1}{\pi}\right)^2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\le T_n\Leftrightarrow\frac{n(2n-1)}{3}\times\frac{\pi^2}{(2n+1)^2}\le\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\le\frac{2n(n+1)}{3}\times\frac{\pi^2}{(2n+1)^2}.$$

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{n(2n-1)}{3}\times\frac{\pi^2}{(2n+1)^2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{2n(n+1)}{3}\times\frac{\pi^2}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{6}$, donc le théorème des gendarmes donne : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}$.