

Dans le \mathbb{R} -espace vectoriel \mathbb{R}^4 , on considère les vecteurs suivants :

$$e_1 = (1 ; 0 ; 1 ; 1), e_2 = (2 ; 1 ; -1 ; 0), e_3 = (1 ; 1 ; 0 ; -1), e_4 = (1 ; -1 ; 1 ; -1), e_5 = (1 ; 1 ; 2 ; -1).$$

1) Les familles suivantes sont-elles libres?

i) $\{e_1 ; e_2 ; e_3\}$

ii) $\{e_1 ; e_2 ; e_3 ; e_4\}$

iii) $\{e_1 ; e_2 ; e_3 ; e_5\}$

2) Soient $F = \text{Vect}\{e_1 ; e_2 ; e_3\}$ et $G = \text{Vect}\{e_4 ; e_5\}$.

a) Déterminer une base de $F \cap G$.

b) Donner un supplémentaire de G dans \mathbb{R}^4 .

3) Soit $H = \{(x ; y ; z ; t) \in \mathbb{R}^4, x - y - z = 0 \text{ et } y - z + t = 0\}$.

a) Déterminer $F \cap H$.

b) Montrer que $\mathbb{R}^4 = G \oplus H$.