D.M. n°13 PRIMITIVES DE FONCTIONS TRIGONOMETRIQUES

Pour tout entier naturel n, on considère la fonction f_n définie sur $]-\pi;\pi[$ par :

$$\forall x \in]-\pi;\pi[,\ f_n(x) = \int_0^x \frac{\cos^n t}{1+\cos t}\,\mathrm{d}t$$

1. Calculer $f_0(x), f_1(x)$ et $f_2(x)$.

Indication : effectuer le changement de variable $u = \tan\frac{t}{2}$.

2. a) Justifier que l'on peut restreindre l'étude de f_n à l'intervalle $[0;\pi[$, puis étudier ses variations sur $[0;\pi[$.

b) Déterminer le développement limité de f_n à l'ordre 3 au voisinage de 0.

c) En déduire l'équation de la tangente à la courbe représentative de f_n au point d'abscisse 0, et la position de cette courbe par rapport à la tangente (en discutant suivant les valeurs de n).

3. a) Montrer que :

$$\forall x \in \left[\frac{2\pi}{3};\pi\right[,\ \left|\int_{\frac{2\pi}{3}}^x \frac{\cos^n t}{1+\cos t}\,\mathrm{d}t\right| \geq \frac{1}{2^n}\left(\tan\frac{x}{2} - \sqrt{3}\right)$$

b) En déduire les limites de f_n en π et en $-\pi$

c) Donner l'allure de la courbe représentative de f_n sur $]-\pi;\pi[$, en fonction des valeurs de n.

4. En remarquant que $\forall n \geq 1,\ \forall t \in]-\pi;\pi[,\ \frac{\cos^n t}{1+\cos t} = \cos t\,\frac{\cos^{n-1} t}{1+\cos t}$, trouver une relation entre $f_n(x), f_{n-1}(x)$ et $f_{n-2}(x)$, pour $n \geq 2$.