Pour tout entier naturel n, on considère la fonction f_n définie sur $]-\pi;\pi[$ par :

$$\forall x \in]-\pi;\pi[,\ f_n(x) = \int_0^x \frac{\cos^n t}{1+\cos t}\mathrm{d}t$$

1. Calculer $f_0(x), f_1(x)$ et $f_2(x)$.

Indication : effectuer le changement de variable $u = \tan\frac{t}{2}$.

$$f_0(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+\cos t} \underbrace{=}_{\substack{u=\tan\frac{t}{2}\\ du=\frac{1+u^2}{2}dt}} \int_0^{\tan\frac{x}{2}} \frac{1}{1+\frac{1-u^2}{1+u^2}}\frac{2\mathrm{d}u}{1+u^2} = \int_0^{\tan\frac{x}{2}} \mathrm{d}u = \tan\frac{x}{2}.$$

$$f_1(x) = \int_0^x \frac{\cos t\ \mathrm{d}t}{1+\cos t} = \int_0^x \frac{1+\cos t-1}{1+\cos t}\mathrm{d}t = \int_0^x \left(1-\frac{1}{1+\cos t}\right)\mathrm{d}t = x-\tan\frac{x}{2}.$$

$$f_2(x) = \int_0^x \frac{\cos^2 t}{1+\cos t}\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{\cos^2 t-1+1}{1+\cos t}\mathrm{d}t = \int_0^x \left(\cos t-1+\frac{1}{1+\cos t}\right)\mathrm{d}t = \sin x - x + \tan\frac{x}{2}.$$

2. a) Justifier que l'on peut restreindre l'étude de f_n à l'intervalle $[0;\pi[$, puis étudier ses variations sur $[0;\pi[$.

$$\forall x \in]-\pi;\pi[,\ f_n(-x) = \int_0^{-x} \frac{\cos^n t}{1+\cos t}dt \underbrace{=}_{u=-t} \int_0^x \frac{\cos^n u}{1+\cos u}(-du) = -f_n(x)\ ;$$

la fonction f_n est donc impaire. On peut restreindre son étude à $[0;\pi[$.

La fonction $t \mapsto \frac{\cos^n t}{1+\cos t}$ est continue sur $[0;\pi[$, la fonction f_n est sa primitive s'annulant en 0, elle est donc dérivable et : $\forall x \in [0;\pi[,\ f_n'(x) = \frac{\cos^n x}{1+\cos x}$.

- Si n est pair, $\forall x \in [0;\pi[,\ f_n'(x) \geq 0$ donc f_n est croissante sur $[0;\pi[$.
- Si n est impair, $\forall x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right],\ f_n'(x) \geq 0$, et $\forall x \in \left[\frac{\pi}{2};\pi\right[,\ f_n'(x) \leq 0$ donc f_n est croissante sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right[$.

b) Déterminer le développement limité de f_n à l'ordre 3 au voisinage de 0.

$$f_n'(x) = \frac{\cos^n x}{1+\cos x} = \frac{\left(1-\frac{x^2}{2}+o_0(x^2)\right)^n}{2-\frac{x^2}{2}+o_0(x^2)} = \frac{1-n\frac{x^2}{2}+o_0(x^2)}{2\left(1-\frac{x^2}{4}+o_0(x^2)\right)} = \frac{1}{2}\left(1-n\frac{x^2}{2}+o_0(x^2)\right)\left(1+\frac{x^2}{4}+o_0(x^2)\right)$$

$$= \frac{1}{2}-\frac{2n-1}{8}x^2+o_0(x^2)$$

Comme $f_n(0) = 0$, on a par intégration : $f_n(x) = \frac{x}{2}-\frac{2n-1}{24}x^3+o_0(x^3)$.

c) En déduire l'équation de la tangente à la courbe représentative de f_n au point d'abscisse 0, et la position de cette courbe par rapport à la tangente (en discutant suivant les valeurs de n).

On déduit de la question précédente que la courbe représentative de f_n admet en l'origine une tangente d'équation $y=\dfrac{x}{2}$. De plus, $f_n(x)-\dfrac{x}{2}=-\dfrac{2n-1}{24}x^3+o_0\left(x^3\right)$ donc :

- Si $n = 0$, la courbe est au-dessus de sa tangente au voisinage de 0^+, et en dessous au voisinage de 0^-.
- Si $n\geq 1$, la courbe est en dessous de sa tangente au voisinage de 0^+, et au-dessus au voisinage de 0^-.

3. a) Montrer que :

$$\forall x\in\left[\frac{2\pi}{3};\pi\right[,\quad \left|\int_{\frac{2\pi}{3}}^{x}\frac{\cos^n t}{1+\cos t}\mathrm{d}t\right|\geq\frac{1}{2^n}\left(\tan\frac{x}{2}-\sqrt{3}\right)$$

Soit $x\geq\dfrac{2\pi}{3}$. $t\mapsto\dfrac{\cos^n t}{1+\cos t}$ est de signe constant sur $\left[\dfrac{2\pi}{3};x\right]$, et $\forall t\in\left[\dfrac{2\pi}{3};\pi\right[,\left|\cos t\right|\geq\dfrac{1}{2}$.

On a donc : $\left|\displaystyle\int_{\frac{2\pi}{3}}^{x}\frac{\cos^n t}{1+\cos t}dt\right|=\displaystyle\int_{\frac{2\pi}{3}}^{x}\frac{\left|\cos^n t\right|}{1+\cos t}dt\geq\frac{1}{2^n}\int_{\frac{2\pi}{3}}^{x}\frac{\mathrm{d}t}{1+\cos t}=\frac{1}{2^n}\left(\tan\frac{x}{2}-\sqrt{3}\right)$.

b) En déduire les limites de f_n en π et en $-\pi$

Le théorème de comparaison donne : $\displaystyle\lim_{x\to\pi}\left|\int_{\frac{2\pi}{3}}^{x}\frac{\cos^n t}{1+\cos t}dt\right|=+\infty$.

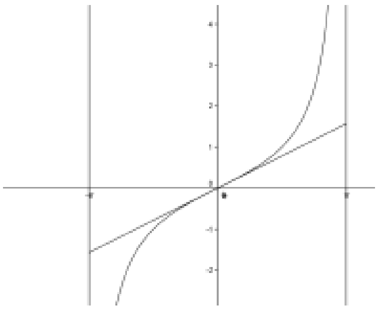
$f_n(x)=\displaystyle\int_0^{\frac{2\pi}{3}}\frac{\cos^n t}{1+\cos t}dt+\int_{\frac{2\pi}{3}}^{x}\frac{\cos^n t}{1+\cos t}dt$ donc $\displaystyle\lim_{x\to\pi}\left|f_n(x)\right|=+\infty$

En tenant compte du signe de $f_n(x)$, et de la parité de f_n on a :

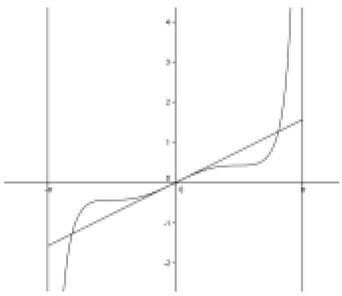
- Si n est pair : $\displaystyle\lim_{x\to\pi}f_n(x)=+\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to-\pi}f_n(x)=-\infty$;
- Si n est impair : $\displaystyle\lim_{x\to\pi}f_n(x)=-\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to-\pi}f_n(x)=+\infty$.

c) Donner l'allure de la courbe représentative de f_n sur $]-\pi;\pi[$, en fonction des valeurs de n.

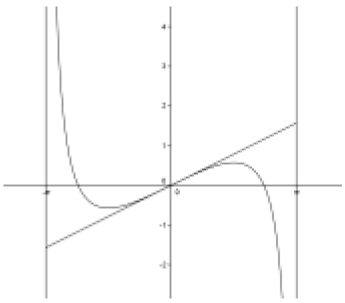
si $n = 0$:



si $n > 0$, pair :



si $n > 0$, impair :



4. En remarquant que $\forall n \geq 1,\ \forall t \in \left]-\pi;\pi\right[,\ \dfrac{\cos^n t}{1+\cos t} = \cos t \dfrac{\cos^{n-1} t}{1+\cos t}$, trouver une relation entre $f_n(x), f_{n-1}(x)$ et $f_{n-2}(x)$, pour $n \geq 2$.

Soient u et v telles que $\forall t \in \left]-\pi;\pi\right[\ :\ u(t) = \dfrac{\cos^{n-1} t}{1+\cos t}$ et $v(t) = \sin t$.

$\forall x \in \left]-\pi;\pi\right[,\ f_n(x) = \int_0^x u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t$.

u et v sont de classe C^1 sur $\left]-\pi;\pi\right[$; une intégration par parties donne :

$$\forall x \in \left]-\pi;\pi\right[,\ f_n(x) = \left[\frac{\sin t \cos^{n-1} t}{1+\cos t}\right]_0^x + (n-1)\int_0^x \frac{\sin^2 t \cos^{n-2} t}{(1+\cos t)^2}\,\mathrm{d}t + (n-2)\int_0^x \frac{\sin^2 t \cos^{n-1} t}{(1+\cos t)^2}\,\mathrm{d}t$$

Or $\forall t \in \left]-\pi;\pi\right[,\ \dfrac{\sin^2 t}{(1+\cos t)^2} = \dfrac{1-\cos^2 t}{(1+\cos t)^2} = \dfrac{1-\cos t}{1+\cos t}$ d'où :

$$\forall x \in \left]-\pi;\pi\right[,\ f_n(x) = \frac{\sin x \cos^{n-1} x}{1+\cos x} + (n-1)\left(f_{n-2}(x) - f_{n-1}(x)\right) + (n-2)\left(f_{n-1}(x) - f_n(x)\right).$$

Finalement, on a : $\forall x \in \left]-\pi;\pi\right[,\ (n-1)\, f_n(x) = \dfrac{\sin x \cos^{n-1} x}{1+\cos x} + (n-1)\, f_{n-2}(x) - f_{n-1}(x)$.