D.M. n°14	APPLICATIONS LINEAIRES

Soient E un espace vectoriel de dimension 3, $\mathcal{B} = (e_1\,;\, e_2\,;\, e_3)$ une base de E et $f_m \in \mathcal{L}(E)$ telle que sa matrice, dans la base $\mathcal{B}$, soit : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1/3 & m & m \\ m & 1/3 & m \\ m & m & 1/3 \end{pmatrix}$

1) Déterminer les valeurs du paramètre réel m pour que f_m soit bijective.

2) On suppose que $m = 1$ et on notera f pour f_1.

a) Déterminer les réels λ tels que $g_\lambda = (f - \lambda.\mathrm{id}_E)$ ne soit pas injective.

b) Pour chacune de ces valeurs λ, déterminer une base de $\mathrm{Ker}(g_\lambda)$.

c) Déterminer une base $\mathcal{B}'$ de E telle que la matrice de f dans $\mathcal{B}'$ soit diagonale.