D.M. n°14	APPLICATIONS LINEAIRES	Correction

Soient E un espace vectoriel de dimension 3, $\mathcal{B} = (e_1 ; e_2 ; e_3)$ une base de E et $f_m \in \mathcal{L}(E)$ telle que sa matrice, dans la base $\mathcal{B}$, soit : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1/3 & m & m \\ m & 1/3 & m \\ m & m & 1/3 \end{pmatrix}$

1) Déterminer les valeurs du paramètre réel m pour que f_m soit bijective.

On est en dimension finie. f_m est bijective si et seulement si elle est injective.

On cherche donc m tel que $\mathrm{Ker} f_m = \{0\}$. On trouve : $m \notin \left\{\frac{1}{3} ; -\frac{1}{6}\right\}$.

2) On suppose que $m = 1$ et on notera f pour f_1.

a) Déterminer les réels λ tels que $g_\lambda = (f - \lambda.\mathrm{id}_E)$ ne soit pas injective. $\lambda \in \left\{-\frac{2}{3} ; \frac{7}{3}\right\}$

b) Pour chacune de ces valeurs λ, déterminer une base de $\mathrm{Ker}(g_\lambda)$.

$\mathrm{Ker}\left(g_{-\frac{2}{3}}\right) = \mathrm{Vect}\{(1;-1;0);(0;1;-1)\}$; $\mathrm{Ker}\left(g_{\frac{7}{3}}\right) = \mathrm{Vect}\{(1;1;1)\}$

c) Déterminer une base $\mathcal{B}'$ de E telle que la matrice de f dans $\mathcal{B}'$ soit diagonale.

Soient $v_1 = (1 ; 1 ; 1)$; $v_2 = (1 ; -1 ; 0)$ et $v_3 = (0 ; 1 ; -1)$.

On vérifie rapidement que $\{ v_1 ; v_2 ; v_3 \}$ est une famille libre.

$\mathcal{B}' = \{ v_1 ; v_2 ; v_3 \}$ est donc une base de E.

D'après ce qui précède, on a : $g_{\frac{7}{3}}(v_1) = 0$, $g_{-\frac{2}{3}}(v_2) = 0$, $g_{-\frac{2}{3}}(v_3) = 0$;

Ce qui donne : $f(v_1) = \frac{7}{3} v_1$, $f(v_2) = -\frac{2}{3} v_2$, $f(v_3) = -\frac{2}{3} v_3$.

Ainsi, on a : $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$.