D.M. n°15 **SERIES**

$\forall n>0, \forall x\in\left]-\infty;1\right]$, on définit : $u_n(x)=\dfrac{x^n}{n}$, $S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}u_k(x)$

1. Etude de $S_n(1)$

Pour $n > 0$, on pose $\gamma_n = S_n(1)-\ln(n)$.

a) Etudier la série de terme général $D_n = \gamma_{n+1}-\gamma_n$ $n > 0$.

b) En déduire que (γ_n) converge. On note γ sa limite (appelée constante d'Euler).

2. Etude de la série $\sum_{n\geq 1}\dfrac{1}{n}\cos\left(\dfrac{2n\pi}{3}\right)$

Pour $n > 0$, on pose $C_n=\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}\cos\left(\dfrac{2k\pi}{3}\right)$.

a) Déterminer les réels a, b et c tels que : $\forall n>0:\ C_{3n}=a\sum_{p=1}^{n}\dfrac{1}{3p}+b\sum_{p=0}^{n-1}\dfrac{1}{3p+1}+c\sum_{p=0}^{n-1}\dfrac{1}{3p+2}$.

b) En déduire que : $\forall n>0:\ C_{3n}=\dfrac{1}{2}S_n(1)-\dfrac{1}{2}S_{3n}(1)$.

c) Déterminer la convergence de la suite (C_n), ainsi que sa limite.

3. Etude de $S_n(-1)$

a) Montrer que : $\forall n>0, \forall x\in\left]-\infty;1\right[:\ \ln(1-x)=-S_n(x)-\int_0^x\dfrac{(x-t)^n}{(1-t)^{n+1}}\,dt$

b) En déduire que la série de terme général $u_n(-1)$ converge, et en donner la somme.

4. Etude de la série $\sum_{n\geq 0}\dfrac{1}{(n+1)(2n+1)}$

a) Déterminer les réels a et b tels que : $\forall n\in\mathbb{N}:\dfrac{1}{(n+1)(2n+1)}=\dfrac{a}{n+1}+\dfrac{b}{2n+1}$

b) Montrer que $\forall n>0,\sum_{k=0}^{n}\dfrac{1}{2k+1}=\dfrac{1}{2}S_n(1)-S_{2n+1}(-1)$.

c) Déterminer la somme de la série $\sum_{n\geq 0}\dfrac{1}{(n+1)(2n+1)}$.