$\forall n>0, \forall x\in\left]-\infty;1\right]$, on définit : $u_n(x)=\dfrac{x^n}{n}$, $S_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}u_k(x)$

1. Etude de ($S_n(1)$)

Pour $n > 0$, on pose $\gamma_n = S_n(1)-\ln(n)$.

a) Etudier la série de terme général $D_n = \gamma_{n+1}-\gamma_n$ $n > 0$.

$$D_n=\frac{1}{n+1}-\ln(n+1)+\ln(n)=\frac{1}{n+1}-\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)=\frac{1}{n}\times\frac{1}{1+\frac{1}{n}}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=-\frac{1}{2n^2}+o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

On en déduit (par comparaison avec une série de Riemann) que la série $\sum D_n$ converge.

b) En déduire que (γ_n) converge. On note γ sa limite (appelée constante d'Euler).

$\forall n>0,\ \sum\limits_{k=1}^{n}D_k=\sum\limits_{k=1}^{n}(\gamma_{k+1}-\gamma_k)=\gamma_{n+1}-\gamma_1$ (somme télescopique).

La série $\sum D_n$ converge donc la suite $\left(\sum\limits_{k=1}^{n}D_k\right)_{n>0}$ converge, de même que la suite $(\gamma_n)_{n>0}$.

2. Etude de la série $\sum\limits_{n\geq 1}\dfrac{1}{n}\cos\left(\dfrac{2n\pi}{3}\right)$

Pour $n > 0$, on pose $C_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}\cos\left(\dfrac{2k\pi}{3}\right)$.

a) Déterminer les réels a, b et c tels que : $\forall n>0:\ C_{3n}=a\sum\limits_{p=1}^{n}\dfrac{1}{3p}+b\sum\limits_{p=0}^{n-1}\dfrac{1}{3p+1}+c\sum\limits_{p=0}^{n-1}\dfrac{1}{3p+2}$.

$$\forall n>0:\ C_{3n}=\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{3p}\cos\left(\frac{2\times3p\pi}{3}\right)+\sum_{p=0}^{n-1}\frac{1}{3p+1}\cos\left(\frac{2\times(3p+1)\pi}{3}\right)+\sum_{p=0}^{n-1}\frac{1}{3p+2}\cos\left(\frac{2\times(3p+2)\pi}{3}\right)$$
$$=\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{3p}-\frac{1}{2}\sum_{p=0}^{n-1}\frac{1}{3p+1}-\frac{1}{2}\sum_{p=0}^{n-1}\frac{1}{3p+2}$$

b) En déduire que : $\forall n>0:\ C_{3n}=\dfrac{1}{2}S_n(1)-\dfrac{1}{2}S_{3n}(1)$.

$$\forall n>0: C_{3n}=\frac{-1}{2}\left(\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{3p}+\sum_{p=0}^{n-1}\frac{1}{3p+1}+\sum_{p=0}^{n-1}\frac{1}{3p+2}\right)+\frac{3}{2}\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{3p}=\frac{-1}{2}\sum_{k=1}^{3n}\frac{1}{k}+\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p}=\frac{-1}{2}S_{3n}(1)+\frac{1}{2}S_n(1)$$

c) Déterminer la convergence de la suite (C_n), ainsi que sa limite.

$$\forall n>0, C_{3n}=-\frac{1}{2}S_{3n}(1)+\frac{1}{2}S_n(1)=\frac{1}{2}\left(\gamma_n+\ln(n)-\gamma_{3n}-\ln(3n)\right)=\frac{1}{2}\left(\gamma_n-\gamma_{3n}-\ln(3)\right).$$

On a montré précédemment que la suite $(\gamma_n)_{n>0}$ converge, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(\gamma_n-\gamma_{3n})=0$;

on en déduit que la suite (C_{3n}) converge vers $\dfrac{-\ln(3)}{2}$.

De plus, $\forall n>0,\ C_{3n+1}=C_{3n}+\dfrac{1}{3n+1}\times\dfrac{-1}{2}$ et $C_{3n+2}=C_{3n}-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3n+1}+\dfrac{1}{3n+2}\right)$

Ainsi, les suites (C_{3n}), (C_{3n+1}) et (C_{3n+2}) convergent vers $\dfrac{-\ln(3)}{2}$, donc (C_n) également.

3. Etude de S_n(-1)

a) Montrer que : $\forall n > 0, \forall x \in]-\infty;1[: \ln(1-x) = -S_n(x) - \int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1-t)^{n+1}} dt$.

La fonction $f : x \mapsto \ln(1-x)$ est de classe C^∞ sur $]-\infty;1[$, et $\forall n > 0, f^{(n)}(x) = \frac{-(n-1)!}{(1-x)^n}$.

Le théorème de Taylor avec reste intégral donne directement le résultat.

b) En déduire que la série de terme général $u_n(-1)$ converge, et en donner la somme.

D'après la question précédente, avec $x = -1$, on a :

$$\forall n > 0, \ln(2) = -S_n(-1) - \int_0^{-1} \frac{(-1-t)^n}{(1-t)^{n+1}} dt \underbrace{=}_{\substack{u=-t \\ du=-dt}} -S_n(-1) + \int_0^1 \frac{(-1+u)^n}{(1+u)^{n+1}} du.$$

Ainsi, $\forall n > 0, \left|S_n(-1) + \ln(2)\right| = \left|\int_0^1 \frac{(-1+u)^n}{(1+u)^{n+1}} du\right| \leq \int_0^1 (1-u)^n du = \frac{1}{n+1}$.

On en déduit que la série de terme général $u_n(-1)$ converge vers $-\ln(2)$.

4. Etude de la série $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(n+1)(2n+1)}$

a) Déterminer les réels a et b tels que : $\forall n \in \mathbb{N} : \frac{1}{(n+1)(2n+1)} = \frac{a}{n+1} + \frac{b}{2n+1}$

$$\forall n \in \mathbb{N} : \frac{1}{(n+1)(2n+1)} = \frac{-1}{n+1} + \frac{2}{2n+1}.$$

b) Montrer que $\forall n > 0, \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2k+1} = \frac{1}{2} S_n(1) - S_{2n+1}(-1)$.

$$\forall n > 0, S_{2n+1}(-1) = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k} = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{2p} + \sum_{p=0}^{n} \frac{-1}{2p+1} = \frac{1}{2} S_n(1) - \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{2p+1},$$

ce qui donne le résultat attendu.

c) Déterminer la somme de la série $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(n+1)(2n+1)}$.

$$\forall n > 0, \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)(2k+1)} = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{-1}{k+1} + \frac{2}{2k+1}\right) = -S_{n+1}(1) + 2\left(\frac{1}{2} S_n(1) - S_{2n+1}(-1)\right)$$

$$= -S_{n+1}(1) + S_n(1) - 2S_{2n+1}(-1) = \frac{-1}{n+1} - 2S_{2n+1}.$$

D'après la question **3**, $\lim_{n\to+\infty} S_n(-1) = -\ln(2)$, donc la série $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(n+1)(2n+1)}$ converge vers $2\ln(2)$.