ETUDE DE LA FONCTION EXPONENTIELLE

L'objectif du devoir est de démontrer que les fonctions dérivables solutions de l'équation fonctionnelle : $\forall (x\,;\,y) \in \mathbb{R}^2$, *$f(x + y) = f(x)\,f(y)$, sont les solutions du problème de Cauchy :* $\begin{cases} y' = ky \\ y(0) = 1 \end{cases}$ *où $k \in \mathbb{R}$,*

puis de démontrer l'existence d'une fonction f vérifiant f ' = f et f(0) = 1.
Le principe de démonstration de ce résultat repose, pour x fixé, sur la fabrication de deux suites adjacentes, $(U_n(x))$ et $(V_n(x))$, dont la limite commune définit l'image de x par une fonction vérifiant l'équation différentielle.

1ère PARTIE

Dans cette partie, on s'intéresse aux fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$, telles que:

$$\forall (x\,;\,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad f(x + y) = f(x) \times f(y) \qquad (1)$$

1- Soient f une telle fonction, et $a \in \mathbb{R}$.
On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction φ_a telle que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi_a(x) = f(x + a) - f(x)\,f(a)$.

a) Justifier la dérivabilité de φ_a sur $\mathbb{R}$; puis exprimer sa dérivée à l'aide de la dérivée de f.

b) En déduire que toute fonction f dérivable vérifiant ***(1)*** vérifie:

$$\exists\, k \in \mathbb{R},\ \forall a \in \mathbb{R} :\ f'(a) = k\,f(a).$$

c) On suppose que f n'est pas la fonction nulle. Que vaut f(0)?

2- Soit $k \in \mathbb{R}^*$. On suppose qu'il existe une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = k\,f(x), \quad \text{et } f(0) = 1.$$

a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x)\,f(-x) = 1$, et par suite que f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

b) Soit $a \in \mathbb{R}$. On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction ψ_a telle que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\psi_a(x) = f(x + a) \times f(-x)$.
Après avoir exprimé la dérivée de ψ_a, montrer que f vérifie ***(1)***.

2ème PARTIE

1- Construction de $(U_n(x))$ et $(V_n(x))$.

En appliquant la méthode d'Euler, montrer par récurrence que pour tout réel a, tout réel h « suffisamment petit », et tout entier naturel n, on a: $f(a + nh) \approx f(a)\,(1 + h)^n \quad (*)$

Soient $x \in \mathbb{R}$, et $n > |x|$.
Avec $a = 0$, et $h = \frac{x}{n}$, $(*)$ donne: $f(x) \approx f(0)\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$. On note $U_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$.
Avec $a = x$, et $h = -\frac{x}{n}$, $(*)$ donne: $f(0) \approx f(x)\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n$. On note $V_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{-n}$.

2- Etude des suites $(U_n(x))$ et $(V_n(x))$.

Soit $x \in \mathbb{R}$, quelconque fixé. Les suites $(U_n(x))$ et $(V_n(x))$ sont définies comme au **1**, pour $n > |x|$.

a) Montrer que $\forall x \geq -1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $(1 + x)^n \geq 1 + nx$.

b) Montrer que $(U_n(x))$ est croissante.

T.S.V.P.

c) Vérifier que $\dfrac{1}{V_n(x)}$ = $U_n(-x)$. En déduire le sens de variation de $(V_n(x))$.

d) Montrer que $\forall n > |x|$: $1 \geq \dfrac{U_n(x)}{V_n(x)} \geq 1 - \dfrac{x^2}{n}$; en déduire que $0 \leq V_n(x) - U_n(x) \leq V_n(x) \times \dfrac{x^2}{n}$.

e) Déduire des questions précédentes que les suites $(U_n(x))$ et $(V_n(x))$ sont adjacentes.

Les suites $(U_n(x))$ et $(V_n(x))$ étant adjacentes, elles ont même limite.
On note exp la fonction qui à x fait correspondre la limite commune des suites $(U_n(x))$ et $(V_n(x))$.

3- Etude de la fonction exp.

a) Vérifier que exp(0) = 1.

b) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ tel que $n + 1 > |x|$, et $h \in \mathbb{R}$ tel que $|h| < 1$, on a :

$$\left(1+\frac{x+h}{n}\right)^n \geq \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \left(1+\frac{h}{\left(1+\left(\frac{x}{n}\right)\right)}\right).$$

En déduire que pour $x \in \mathbb{R}$, et $h \in \mathbb{R}$ tel que $|h| < 1$, $\exp(x) \times h \leq \exp(x+h) - \exp(x) \leq \exp(x) \times \dfrac{h}{1-h}$.

c) Démontrer que la fonction exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ et qu'elle vérifie les conditions f ' = f et f(0) = 1.