D.M. FONCTION EXPONENTIELLE Correction

1ère PARTIE

1- a) φ_a est dérivable sur $\mathbb{R}$ car f l'est. Pour tout réel x : $\varphi_a'(x) = f'(x + a) - f'(x) f(a)$.

b) f vérifiant (1), la fonction φ_a est identiquement nulle, donc pour tous les réels a et x : $f'(x + a) = f'(x) f(a)$.
En particulier, pour $x = 0$, $f'(a) = f'(0) f(a)$.

c) f vérifiant (1), $f(0) = f(0)^2$ donc soit $f(0) = 0$, soit $f(0) = 1$.
Si $f(0) = 0$, alors pour tout réel x : $f(x) = f(x) \times f(0) = 0$, et la fonction f est identiquement nulle.
Donc, si f n'est pas la fonction nulle, $f(0) = 1$.

2- a) Considérons la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x) f(-x)$.
g est dérivable sur $\mathbb{R}$ car f l'est, et pour tout réel x : $g'(x) = f'(x) f(-x) - f(x)f'(-x) = kf(x)f(-x) - kf(x)f(-x) = 0$.
La fonction g est donc constante et pour tout réel x : $g(x) = g(0) = f(0)^2 = 1$.

S'il existait un réel a tel que $f(a) = 0$, on aurait $f(a) f(-a) = 0 \neq 1$. On en déduit que la fonction f ne s'annule pas.

b) ψ_a est dérivable sur $\mathbb{R}$ car f l'est, et pour tout réel x :
$\psi_a'(x) = f'(x + a) f(-x) - f(x + a) f'(-x) = k f(x + a) f(-x) - k f(x + a) f(-x) = 0$. La fonction ψ_a est donc constante , et pour tout réel x : $\psi_a(x) = \psi_a(0) = f(a)$.
On a donc pour tous les réels a et x : $f(x+a)f(-x) = f(a)$, donc en multipliant par f(x) : $f(x + a) = f(x) f(a)$.

2ème PARTIE

1- Soient $a \in \mathbb{R}$, et $h \in \mathbb{R}$, suffisamment petit.
f étant dérivable, on a pour tout réel x, $f(x + h) = f(x) + f'(x) . h + h . \varepsilon(h)$ avec $\lim\limits_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$.

Comme $f' = f$, on a: $f(x + h) \approx f(x) (1 + h)$ $(*)$

On va démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, la propriété Q(n) : « $f(a + nh) \approx f(a) (1 + h)^n$ » est vraie.

- *Initialisation*: n = 0: $f(a + 0) = f(a) (1 + h)^0$ donc $f(a + 0) \approx f(a) (1 + h)^0$ Q(0) est vraie.
- *Hérédité*: Soit $n \geq 0$ on suppose que Q(n) est vraie (i.e. $f(a + nh) \approx f(a) (1 + h)^n$ HR).

On a: $f(a + (n + 1)h) = f((a + nh) + h) \approx f(a + nh) (1 + h)$ (on utilise $(*)$ avec $x = a + nh$), donc d'après HR:
$f(a + (n + 1) h) \approx f(a) (1 + h)^{n+1}$.

- *Conclusion* : La propriété Q(n) est vraie pour n = 0, elle est héréditaire pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc :
  $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(a + nh) \approx f(a) (1 + h)^n$.

2- a) Soit $x > -1$. On va démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, la propriété P(n) : « $(1 + x)^n \geq 1 + nx$ » est vraie.

- *Initialisation*: $(1 + x)^1 = 1 + 1 \times x$ donc P(1) est vraie.
- *Hérédité*: Soit $n \geq 1$, on suppose que P(n) est vraie (i.e. $(1 + x)^n \geq 1 + nx$ HR).

$(1 + x)^{n+1} = (1 + x)^n \times (1 + x)$; comme $x > -1$, $1 + x > 0$, donc d'après HR:
$(1 + x)^{n+1} \geq (1 + nx) (1 + x) = 1 + (n + 1)x + nx^2 \geq 1 + (n +1)x$.

- *Conclusion :* La propriété P(n) est vraie pour n = 1, elle est héréditaire pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, donc :
  $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $(1 + x)^n \geq 1 + nx$. On note (P) cette propriété.

b) Soient $x \in \mathbb{R}$, et $n \in \mathbb{N}$, tels que $n > |x|$. On a:

$$U_{n+1}(x) = \left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{x}{n}-\frac{x}{n}+\frac{x}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{x}{n}-\frac{x}{n(n+1)}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{x}{n}\right)^{n+1}\left(1-\frac{x}{n(n+1)\left(1+\frac{x}{n}\right)}\right)^{n+1}$$

On veut appliquer (P) au second facteur. Vérifions que $\frac{x}{n(n+1)\left(1+\frac{x}{n}\right)} \leq 1$.

Vu que $n > |x|$, $1+\frac{x}{n} > 0$, donc ceci revient à montrer que $x \leq n(n+1)\left(1+\frac{x}{n}\right)$ qui équivaut à $-x \leq n+1$, qui est vrai, puisque $n > |x|$. Donc, en remarquant encore que $1+\frac{x}{n} > 0$:

$$U_{n+1}(x) \geq \left(1+\frac{x}{n}\right)^{n+1}\left(1-\frac{x}{n\left(1+\frac{x}{n}\right)}\right) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^{n}\left(1+\frac{x}{n}-\frac{x}{n}\right) = U_n(x).$$

On a donc $U_{n+1}(x) \geq U_n(x)$, donc la suite $(U_n(x))$ est croissante.

c) On a $\frac{1}{V_n(x)} = U_n(-x)$, or ce qui précède est valable pour tout réel x, donc la suite $(U_n(-x))$ est croissante, et la suite $\left(\frac{1}{V_n(x)}\right)$ aussi. On a donc $\forall n > |x|$: $\frac{1}{V_{n+1}(x)} \geq \frac{1}{V_n(x)}$.

$(V_n(x))$ est une suite de réels positifs; la fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, donc $V_{n+1}(x) \leq V_n(x)$;
la suite $(V_n(x))$ est donc décroissante.

d) $\frac{U_n(x)}{V_n(x)} = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n\left(1-\frac{x}{n}\right)^n = \left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^n$.

Comme $n > |x|$, $0 < 1-\frac{x^2}{n^2} \leq 1$, en utilisant (P) on obtient: $1 \geq \frac{U_n(x)}{V_n(x)} \geq 1 - \frac{x^2}{n}$.

On en déduit (comme $V_n(x) \geq 0$) que $U_n(x) \leq V_n(x)$ et $0 \leq V_n(x) - U_n(x) \leq V_n(x) \times \frac{x^2}{n}$.

e) La suite $(V_n(x))_{n>|x|}$ étant décroissante, elle est majorée par son premier terme $V_{n_0}(x)$ ($n_0 = E(|x|) + 1$), alors on a: $0 \leq V_n(x) - U_n(x) \leq V_{n_0}(x) \times \frac{x^2}{n}$, on applique le théorème des gendarmes, et on obtient :
$\lim_{n\to+\infty} (V_n(x) - U_n(x)) = 0$.

Finalement, on a: $(U_n(x))$ croissante, $(V_n(x))$ décroissante, $\forall n > |x|$, $U_n(x) \leq V_n(x)$, et $\lim_{n\to+\infty} (V_n(x) - U_n(x)) = 0$.
Les suites $(U_n(x))$ et $(V_n(x))$ sont donc adjacentes.

3- a) $U_n(0) = V_n(0) = 1$, $\forall n > |x|$, donc $\exp(0) = \lim\limits_{n\to+\infty} U_n(0) = \lim\limits_{n\to+\infty} V_n(0) = 1$.

b) Soient $x\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$ tel que $n > |x|$, et $h\in\mathbb{R}$ tel que $|h| < 1$.

On a: $\left(1+\frac{x+h}{n}\right)^n = \left(1+\frac{x}{n}+\frac{h}{n}\right)^n = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n\left(1+\frac{h}{n\left(1+\frac{x}{n}\right)}\right)^n$.

Or vu les conditions imposées à x, n et h, on a : $\frac{h}{n\left(1+\frac{x}{n}\right)} \geq -1$, on a la conclusion en appliquant la propriété (P).

En passant à la limite dans l'inégalité précédente, on a: $\exp(x+h) \geq \exp(x)\,(1 + h)$.

En prenant $x' = x + h$, et $h' = -h$, on obtient:

$\exp(x') \geq \exp(x' + h')\,(1 - h')$, ou $\exp(x' + h') \leq \frac{\exp(x')}{1-h'}$. Ce qui permet d'écrire : $\exp(x + h) \leq \frac{\exp(x)}{1-h}$

On a donc pour tout réel x, et $|h| < 1$, $\exp(x)\times h \leq \exp(x+h) - \exp(x) \leq \exp(x)\times\frac{h}{1-h}$.

c) L'inégalité précédente donne:

pour $h > 0$: $\exp(x) \leq \frac{\exp(x+h) - \exp(x)}{h} \leq \frac{\exp(x)}{1-h}$

pour $h < 0$: $\frac{\exp(x)}{1-h} \leq \frac{\exp(x+h) - \exp(x)}{h} \leq \exp(x)$.

En faisant tendre h vers 0, on obtient d'après le théorème des gendarmes: $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\exp(x+h) - \exp(x)}{h} = \exp(x)$.

Ainsi la fonction exp est dérivable sur $\mathbb{R}$, et sa dérivée est elle même.