Devoir maison 10 - équation aux dérivées partielles

U désigne un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$, et $\lambda \in \mathbb{R}$. On considère l'équation aux dérivées partielles

$$E_\lambda : x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \lambda f(x,y).$$

On note $S_\lambda(U)$ l'ensemble des fonctions réelles définies sur U, de classe C^1, solutions de E_λ.

PARTIE I : Généralités

1. Vérifier que les applications $p_x : (x,y) \mapsto x$ et $p_y : (x,y) \mapsto y$ appartiennent à $S_1(\mathbb{R}^2)$.

2. Soit $f \in S_\lambda(U)$ de classe C^2. Montrer que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ appartiennent à $S_{\lambda-1}(U)$.

3. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que si $f \in S_\lambda(U)$ et $g \in S_\mu(U)$ alors $fg \in S_\theta(U)$ pour un réel θ que l'on précisera en fonction de λ et μ.

4. Soit $f \in S_\lambda(U)$ telle que $\forall (x,y) \in U, f(x,y) > 0$.
Montrer que pour $\alpha \in \mathbb{R}, f^\alpha : (x,y) \mapsto (f(x,y))^\alpha$ appartient à $S_{\alpha\lambda}(U)$.

PARTIE II : Résolution sur $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*}$

Dans cette partie, $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*}$.

1. Justifier que l'application $\Phi : U \to \mathbb{R}^2$ définie par $\Phi(u,v) = (uv, v)$ réalise une bijection de U sur U, et déterminer sa bijection réciproque.

2. Soient $f \in C^1(U, \mathbb{R})$ et $g : U \to \mathbb{R}$ définie par $g = f \circ \Phi$.

a. Justifier que g est de classe C^1, et exprimer $\dfrac{\partial g}{\partial u}$ et $\dfrac{\partial g}{\partial v}$ en fonction de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

b. Justifier que $f \in S_\lambda(U)$ si, et seulement si g est solution sur U de l'équation

$$(E) : v\frac{\partial g}{\partial v} = \lambda g(u,v).$$

c. Résoudre (E) et décrire $S_\lambda(U)$.

PARTIE III : Résolution sur $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0\}$

Dans cette partie, $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0\}$.

1. Soit $f \in C^2(U, \mathbb{R})$.

a. Soit $(x,y) \in U$ fixé. Pour $t \in \mathbb{R}^{+*}$, on pose $\varphi(t) = f(tx, ty)$.
Justifier que φ est de classe C^1, et calculer φ'.

b. Etablir : $f \in S_0(U) \Leftrightarrow (\forall (x,y) \in U, \forall t > 0, f(tx,ty) = f(x,y))$.

c. En déduire que les solutions de E_0 sur U sont des fonctions de la forme :

$$(x,y) \mapsto \psi\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), \quad \text{où } \psi \in C^1(U, \mathbb{R})$$

2. Soient $r_\lambda : U \to \mathbb{R}$ définie par $r_\lambda(x,y) = \left(x^2+y^2\right)^{\frac{\lambda}{2}}$, et $g : U \to \mathbb{R}$ définie par $g(x,y) = f(x,y) r_{-\lambda}(x,y)$.

a. Justifier que $r_\lambda \in S_\lambda(U)$.

b. Montrer que $f \in S_\lambda(U) \Leftrightarrow g \in S_0(U)$.

c. En déduire $S_\lambda(U)$.