Devoir maison 11 - transformée de Fourier

Pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ et tout réel x, on note, lorsqu'elle existe :

$$\widehat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-ixt} f(t)\mathrm{d}t$$

Quand elle est définie, la fonction $\widehat{f}$ s'appelle la **transformée de Fourier** de f.

1. Transformée de Fourier d'une fonction intégrable

Dans cette question, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est une fonction continue et intégrable sur $\mathbb{R}$.

a. Montrer que $\widehat{f}(x)$ est défini pour tout $x \in \mathbb{R}$, et que la fonction $\widehat{f}$ est continue et bornée.

b. Vérifier que pour tout réel $a \neq 0$, les fonctions $f_{Ta} : t \mapsto f(t-a)$ et $f_{Ha} : t \mapsto f(at)$ admettent des transformées de Fourier, et montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \widehat{f_{Ta}}(x) = \mathrm{e}^{-iax}\widehat{f}(x) \quad \text{et} \quad \widehat{f_{Ha}}(x) = \frac{1}{a}\widehat{f}\left(\frac{x}{a}\right)$$

c. Exprimer de même la transformée de Fourier de $t \mapsto \mathrm{e}^{iat}f(t)$ en fonction de celle de f, après avoir justifié qu'elle existe.

d. Si f est paire, donner une expression de sa transformée de Fourier sous forme d'une intégrale sur $[0, +\infty[$.

e. Même question si f est impaire.

f. Que peut-on dire de la transformée de Fourier d'une fonction réelle paire ? réelle impaire ?

2. Dérivation

On considère $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, et on suppose que f et f' sont intégrables sur $\mathbb{R}$.

a. Montrer que f tend vers 0 en $\pm\infty$.

b. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \widehat{f'}(x) = ix\widehat{f}(x)$, puis en déduire que $\widehat{f}$ tend vers 0 en $\pm\infty$.

c. On suppose de plus que $\varphi : t \mapsto tf(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.
Montrer que $\widehat{f}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \left(\widehat{f}\right)'(x) = -i\widehat{\varphi}(x).$$