Devoir maison 1 - Algèbre linéaire

On considère un $\mathbb{K}$-espace vectoriel noté E, et on note $\mathcal{S}(E) = \{u \in \mathcal{L}(E) / u^3 = u^2\}$.

1. Soit l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ f(x, y, z) = (0, x, z)$$

a. Montrer que $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$.

b. Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

2. On considère maintenant un endomorphisme u de $\mathcal{S}(E)$.

a. Montrer que u est inversible si, et seulement si $u = \mathrm{Id}_E$.

b. Soit $\lambda \in \mathbb{K} - \{0; -1\}$. Montrer que l'endomorphisme $v = u + \lambda \mathrm{Id}_E$ est inversible.

c. Montrer que si $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}(u^2)$, alors u est un projecteur.

3. On suppose dans cette question que u n'est pas injectif et que $\mathrm{Ker}(u) \neq \mathrm{Ker}(u^2)$.

a. Déterminer u^n pour $n \geq 3$.

b. En déduire que $\mathrm{Ker}(u^2) \oplus \mathrm{Im}(u^2) = E$.

c. Montrer que $\mathrm{Im}(u^2)$ est stable par u, et déterminer la restriction de u à $\mathrm{Im}(u^2)$.

d. Soit v la restriction de u à $\mathrm{Ker}(u^2)$.
Montrer que v est nilpotent (c'est-à-dire : $\exists p \in \mathbb{N} / v^p = 0_{\mathcal{L}(\mathrm{Ker}(u^2))}$).