Devoir maison 3 - Réduction des endomorphismes

Exercice 1

Soit E un $\mathbb{C}$-ev de dimension 3, muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Soient u l'endomorphisme de E dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, et v un endomorphisme de E dont la matrice dans $\mathcal{B}$, notée M est telle que $M^n = A$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Déterminer les éléments propres de A, et dire si la matrice est diagonalisable.

2. On note $E_2 = \mathrm{Ker}(u - 2\mathrm{Id})$ et $F_1 = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id})^2$; montrer que ces espaces sont supplémentaires dans E.

3. Montrer que u et v commutent et que les deux noyaux précédents sont stables par v.

4. Montrer que M est de la forme $\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$, avec $p \in \mathbb{C}$ et $C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

5. Résoudre l'équation $M^n = A$. (On rappelle que E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel !)

Exercice 2

L'objectif de l'exercice est de montrer qu'un endomorphisme est diagonalisable si, et seulement s'il admet un polynôme annulateur scindé à racines simples.
u désigne un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(u) = 0$, avec P non nul, scindé à racines simples $\lambda_1, ..., \lambda_p$.

a. Soit $(P_1, ..., P_p)$ la famille de $\mathbb{K}_{p-1}[X]$, définie par :

$$\forall k \in [\![1, p]\!], P_k(X) = \prod_{j \neq k} \frac{X - \lambda_j}{\lambda_k - \lambda_j}$$

Montrer que c'est une base de $\mathbb{K}_{p-1}[X]$ (appelée base d'interpolation de Lagrange).

b. Soit $Q \in \mathbb{K}_{p-1}[X]$; montrer que : $Q = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} Q(\lambda_k) P_k$.

c. En déduire que : $\mathrm{Id}_E = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} P_k(u)$, puis que : $E = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \mathrm{Im}(P_k(u))$.

d. Montrer que $\forall k \in [\![1, p]\!], \mathrm{Im}(P_k(u)) \subset \mathrm{Ker}(u - \lambda_k \mathrm{Id}_E)$.

e. Conclure.

2. On suppose que u est diagonalisable, de valeurs propres (distinctes) $\lambda_1, ..., \lambda_p$.

Montrer que $P = \displaystyle\prod_{k=1}^{p} (X - \lambda_k)$ est un polynôme annulateur de u.