Devoir maison 7 - Espaces vectoriels normés

Définition : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une application N de E dans $\mathbb{R}$ est une **norme** sur E si elle vérifie :

- $\forall x \in E, N(x) \geq 0$ (**Positivité**)
- $\forall x \in E, N(x) = 0 \Rightarrow x = 0_E$ (**Séparation**)
- $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$ (**Homogénéité**)
- $\forall (x, y) \in E^2, N(x+y) \leq N(x) + N(y)$ (**Inégalité triangulaire**)

Un couple (E, N) où N est une norme sur E s'appelle un **espace vectoriel normé**.
On note souvent une norme $\|\cdot\|$.

1. Soient $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace préhilbertien réel.
Montrer que l'application $\|\cdot\| : x \mapsto \|x\| = \sqrt{(x|x)}$ est une norme sur E.
On l'appelle **norme euclidienne associée** à $(\cdot|\cdot)$.

- Le produit scalaire est défini positif, donc $\|\cdot\|$ vérifie les axiomes de positivité et de séparation.
- Par bilinéarité du produit scalaire, $\forall (x, \lambda) \in E \times \mathbb{K}$ on a :
  $\|\lambda x\|^2 = (\lambda x|\lambda x) = \lambda^2 \|x\|^2$ donc $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$.
- Par bilinéarité du produit scalaire : $\forall (x, y) \in E^2$: $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2(x|y) + \|y\|^2$;
  l'inégalité de Cauchy Schwarz donne : $\|x+y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\| \, \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$
  d'où l'inégalité triangulaire.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{K}^n$.
Montrer que les applications suivantes sont des normes sur $\mathbb{K}^n$:

a. $\|\cdot\|_1 : x \mapsto \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ (appelée *norme 1*) ;

- $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \geq 0$
- $\|x\|_1 = 0 \Rightarrow \forall i \in [\![1, n]\!], 0 \leq |x_i| \leq \|x\|_1 = 0 \Rightarrow \forall i \in [\![1, n]\!], x_i = 0 \Rightarrow x = 0$
- $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \|\lambda x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |\lambda x_i| = |\lambda| \sum_{i=1}^{n} |x_i| = |\lambda| \, \|x\|_1$
- d'après l'inégalité triangulaire du module :
  $\|x+y\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i| \leq \sum_{i=1}^{n} (|x_i| + |y_i|) = \|x\|_1 + \|y\|_1$

b. $\|\cdot\|_2 : x \mapsto \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$ (appelée *norme 2*) ;

C'est la norme euclidienne (définie dans la question 1) !

c. $\|\cdot\|_\infty \mapsto \max_{i \in [\![1,n]\!]} |x_i|$ (appelée *norme infinie*)

- $\|x\|_\infty = \max_{i \in [\![1,n]\!]} |x_i| \geq 0$
- $\|x\|_\infty = 0 \Rightarrow \forall i \in [\![1, n]\!], 0 \leq |x_i| \leq \|x\|_\infty = 0 \Rightarrow \forall i \in [\![1, n]\!], x_i = 0 \Rightarrow x = 0$
- Soit $k_0 \in [\![1, n]\!]$ tel que $\|x\|_\infty = |x_{k_0}|$. Alors :
  $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall i \in [\![1, n]\!], |\lambda x_i| = |\lambda| \, |x_i| \leq |\lambda| \, |x_{k_0}|$ donc $\max_{i \in [\![1,n]\!]} |\lambda x_i| = |\lambda| \, |x_{k_0}| = |\lambda| \|x\|_\infty$

- Soit $k_0 \in [\![1,n]\!]$ tel que $\|x+y\|_\infty = |x_{k_0}+y_{k_0}|$. Alors :
  $\|x+y\|_\infty = |x_{k_0}+y_{k_0}| \leq |x_{k_0}| + |y_{k_0}| \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$

3. Montrer que $\forall x \in \mathbb{K}^n, \|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n}\|x\|_2 \leq n\|x\|_\infty$.

- $\forall k \in [\![1,n]\!], |x_k| \leq \displaystyle\sum_{i=1}^{n} |x_i| \Rightarrow \|x\|_\infty \leq \|x\|_1$
- L'inégalité de Cauchy Schwarz pour le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$ donne :
  $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (|x_i| \times 1) \leq \left(\sum_{i=1}^{n} 1^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ d'où : $\|x\|_1 \leq \sqrt{n}\|x\|_2$
- $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leq n \max_{i\in[\![1,n]\!]} |x_i|^2 \Rightarrow \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty$

En conclusion, on a bien $\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n}\|x\|_2 \leq n\|x\|_\infty$

4. Pour tout endomorphisme f de $\mathbb{R}^n$, muni de sa structure euclidienne, on note :

$$|||f||| = \sup_{\|x\|=1} \|f(x)\|$$

a. Montrer que $|||\cdot|||$ définit une norme sur $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$.
On note $S = \{x \in \mathbb{R}^n / \|x\| \leq 1\}$.
- $\forall f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n), \forall x \in S, \|f(x)\| \geq 0$ donc $|||f||| \geq 0$;
- Si $|||f||| = 0$, alors $\forall x \in S, \|f(x)\| = 0$. Soit $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$; $\dfrac{y}{\|y\|} \in S$, donc
  $f(y) = \|y\| \times f\left(\dfrac{y}{\|y\|}\right) = 0$; comme $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n), f(0) = 0$, on a $\forall y \in \mathbb{R}^n, f(y) = 0$, d'où $f = 0$.
- Soit $(f,\lambda) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}; \forall x \in S, \|\lambda f(x)\| = |\lambda|\|f(x)\|$ donc $|||\lambda f||| = |\lambda|\ |||f|||$;
- Soit $(f,g) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n); \forall x \in S, \|f(x)+g(x)\| \leq \|f(x\| + \|g(x)\| \leq |||f||| + |||g|||$ (car $\|\cdot\|$ est une norme). On a donc $|||f+g||| \leq |||f||| + |||g|||$.

b. Soit φ un endomorphisme orthogonal de $\mathbb{R}^n$. Calculer $|||\varphi|||$.
Si $\varphi \in O(\mathbb{R}^n)$, alors $\forall x \in S, \|\varphi(x)\| = \|x\| = 1$. On a donc $|||\varphi||| = 1$.

c. Soit s est un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^n$ (c'est-à-dire un endomorphisme canoniquement associé à une matrice symétrique). Montrer que $|||s||| = \displaystyle\max_{\lambda\in \mathrm{Sp}(s)} |\lambda|$.
Si s est un endomorphisme symétrique, alors il existe une base orthonormée de vecteurs propres (dans laquelle la matrice de s est diagonale).
On note $(e_1,...,e_n)$ cette base, et $\lambda_1,...,\lambda_n$ les valeurs propres associées.
Soit $x \in \mathbb{R}^n$; si $x = \displaystyle\sum_{=1}^{n} x_i e_i$ alors $s(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i\lambda_i e_i$ donc (la famille $(e_1,...,e_n)$ étant orthonormée : $\|s(x)\|^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2\lambda_i^2 \leq \max_{1\leq i\leq n}(\lambda_i^2) \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \max_{1\leq i\leq n}(\lambda_i^2)\|x\|^2$, donc (pour $x \in S$),
$|||s||| \leq \displaystyle\max_{1\leq i\leq n} |\lambda_i|$
Ce majorant est atteint pour $e_{i_0} (\in S)$ tel que $\lambda_{i_0} = \displaystyle\max_{1\leq i\leq n} |\lambda_i|$, on en déduit que
$|||s||| = \displaystyle\max_{1\leq i\leq n} |\lambda_i|$.