Math. - ES 1 - S1 - Algèbre

mardi 03 janvier 2017 - Durée 3 h

Toutes les réponses seront justifiées. La notation tiendra compte du soin apporté à la rédaction.

Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on dit qu'une matrice R de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une *racine carrée* de A si $R^2 = A$. On note :

$$Rac(A) = \{R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), R^2 = A\}$$

1. On suppose que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ admet n valeurs propres réelles distinctes $\lambda_1 < \lambda_2 < ... < \lambda_n$.

a. Justifier l'existence d'une matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = PDP^{-1}$, où $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$, puis montrer que R est une racine carrée de A si, et seulement si la matrice $S = P^{-1}RP$ est une racine carrée de D.

b. Soit S une racine carrée de D.

i. Montrer que $DS = SD$.

ii. En déduire que S est diagonale. On note $S = \mathrm{diag}(s_1, s_2, ..., s_n)$.

iii. Que vaut s_i^2 pour $i \in [\![1, n]\!]$?

c. Expliciter les matrices de $Rac(A)$ en fonction de P.

d. Application : Ecrire les racines carrées de $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -2 \\ -1 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

Avec les notations précédentes, on explicitera P, mais on ne calculera pas P^{-1}.

2. On cherche les racines carrées de la matrice nulle.

a. Justifier que $Rac(0) \neq \varnothing$.

Soient $R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une racine carrée de la matrice nulle, et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à R. On note r le rang de u.

b. Justifier que $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(u)$, et que $r \leq \dfrac{n}{2}$.

c. On suppose u non nul, donc $r \geq 1$. Soit $(e_1, ..., e_r)$ une base de $\mathrm{Im}(u)$ que l'on complète avec $(e_{r+1}, ..., e_{n-r})$ pour former une base de $\mathrm{Ker}(u)$.

Pour $i \in [\![1, r]\!]$, on note b_i un vecteur tel que $u(b_i) = e_i$.

Montrer que la famille $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_{n-r}, b_1, ..., b_r)$ est une base de $\mathbb{R}^n$ puis écrire la matrice de u dans cette base. On la note M_r.

d. Déterminer les racines carrées dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la matrice nulle.

3. On cherche les racines carrées de la matrice unité I_n.

a. Justifier que $Rac(\mathrm{I}_n) \neq \varnothing$.

Soit R une racine carrée de I_n.

b. Justifier que R est inversible.

c. Montrer que R est semblable à une matrice diagonale, et l'expliciter.

d. Déterminer $Rac(\mathrm{I}_n)$.

T.S.V.P.

Exercice 2

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

PARTIE 1

Soit ψ l'application définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par :

$$\psi(P) = (X^2 - 1)P'' + 4XP' + 2P$$

1. Montrer que ψ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Donner la matrice de ψ dans la base canonique $\mathcal{B} = (1, X, ..., X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$.

3. a. Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Montrer qu'il existe un unique polynôme **unitaire** vérifiant $\psi(P) = (k+1)(k+2)P$, et qu'il est de degré k. On notera désormais P_k ce polynôme.

b. Déterminer P_0 et P_1.

c. Pour $k \in [\![2, n]\!]$, expliciter les coefficients de X^{k-1} et X^{k-2} dans P_k.

PARTIE 2

On note E l'ensemble des fonctions réelles continues sur $[-1, 1]$.

On identifiera le polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ avec la fonction polynômiale $t \mapsto P(t)$ définie sur $[-1, 1]$.

Pour $(f, g) \in E^2$, on pose :

$$\varphi(f, g) = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)(1 - t^2)\mathrm{d}t$$

1. Montrer que φ est un produit scalaire sur E.

On munit E de ce produit scalaire, et on note désormais $(f|g)$ le produit scalaire de f et g.

2. Pour $f \in E$ de classe $\mathcal{C}^2$, on pose $\psi(f) = \dfrac{\mathrm{d}^2((x^2-1)f(x))}{\mathrm{d}x^2}$, c'est à dire :

$$\psi(f) : x \mapsto (x^2 - 1)f''(x) + 4xf'(x) + 2f(x)$$

a. Montrer que si f et g sont deux fonctions de E de classe $\mathcal{C}^2$, alors $(\psi(f)|g) = (f|\psi(g))$.

b. Montrer que la famille de polynômes $\{P_0, P_1, ..., P_n\}$ établie dans la partie 1, est orthogonale.

3. Montrer que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, P_k est orthogonal à tout polynôme de degré strictement inférieur à k.

4. Soit $k \in [\![2, n]\!]$.

a. Montrer que le polynôme $P_k - XP_{k-1}$ est de degré au plus $k-1$ et qu'il est orthogonal à tout polynôme de degré inférieur ou égal à $k-3$.

b. En déduire que $P_k - XP_{k-1}$ peut s'écrire comme combinaison linéaire de P_{k-1} et P_{k-2}.

c. En utilisant le résultat établi à la question 3.c. de la partie 1, montrer que

$$P_k = XP_{k-1} - \frac{(k-1)(k+1)}{(2k-1)(2k+1)}P_{k-2}$$

.

Fin de l'énoncé d'algèbre