Math. - ES 1 - S1 - Analyse

mercredi 04 janvier 2017 - Durée 3 h

Toutes les réponses seront justifiées. La notation tiendra compte du soin apporté à la rédaction.

Exercice 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ le système différentiel linéaire suivant :

$$(L) : \left\{ \begin{array}{l} y_1' = 3y_1 - 2y_2 + y_3 \\ y_2' = -y_1 + 2y_2 + y_3 \\ y_3' = -2y_2 + 4y_3 \end{array} \right. .$$

Exercice 2

On donne les résultats suivants : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

1. Soit $I = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\ln(1-x)}{x}\,\mathrm{d}x$.

a. Etudier la fonction $f : x \mapsto -\dfrac{\ln(1-x)}{x}$ sur son domaine de définition et donner l'allure de son graphe.

b. Déterminer la nature des intégrales impropres suivantes :

$$J = \int_{-1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad K = \int_{0}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

2. Etude de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} x^n$.

a. Donner le rayon de convergence R de cette série.

b. Etudier la convergence des séries numériques $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} R^n$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} (-R)^n$.

c. Déterminer la somme F de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} x^n$ ainsi que son domaine de définition.

3. Etude de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n}$ de somme G.

a. Donner le rayon de convergence R' de cette série.

b. Etudier la convergence de la série numérique $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(R')^n}{n}$.

T.S.V.P.

c. Etude de $G(-R')$.

i. Montrer que, pour $x \in [-R', 0]$, on a $G_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t$.

ii. Montrer que, pour $t \in [-R', 0]$, on a $\left|\dfrac{t^n}{1-t}\right| \leqslant |t|^n$ et en déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left|\int_{-1}^{0} \frac{t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t\right| = 0$.

iii. En déduire que $G(-R')$ existe et donner sa valeur.

d. Déterminer la somme G de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n}$ et son domaine de définition.

4. Etude de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n^2}$.

a. Donner le rayon de convergence R'' de cette série.

b. Etudier la convergence des séries numériques $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(R'')^n}{n^2}$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-R'')^n}{n^2}$.

c. Déterminer le domaine de définition de la somme H de cette série et son expression, sous forme d'une intégrale, sur $]-R'', R''[$.

5. Etude de la continuité de H en 1 et en -1.

a. Montrer, à l'aide d'une comparaison à une intégrale, que la fonction $T_n : x \mapsto \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{x^k}{k^2}$ est bornée, sur $[0,1]$, par 0 et $\dfrac{1}{n}$.

b. En déduire qu'en notant $H_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k^2}$ on a :

$$\forall x \in [0,1],\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |H(1) - H(x)| \leqslant |H_n(1) - H_n(x)| + \frac{2}{n}.$$

c. Conclure.

6. Calcul de I.

a. Justifier que l'on a $H(1) = -\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

b. En déduire la valeur de l'intégrale impropre K.

c. En déduire la valeur de l'intégrale impropre J, puis de I.

Fin de l'énoncé d'analyse