- ES-S1 - - 2016-2017 -

– Correction - Analyse –

Exercice 1

On remarqua tout d'abord que l'on a :

$$(L):\begin{cases} y_1' = 3y_1 - 2y_2 + y_3 \\ y_2' = -y_1 + 2y_2 + y_3 \\ y_3' = -2y_2 + 4y_3 \end{cases} \Leftrightarrow Y' = AY \quad \text{pour} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

Or $\chi_A(\lambda) = det(\lambda I_3 - A) = (\lambda - 2)(\lambda - 3)(\lambda - 4) \Rightarrow Sp(A) = \{2; 3; 4\}$.

On trouve ensuite :

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{pour} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a alors :

$$(L) \Leftrightarrow Y' = PDP^{-1}Y \Leftrightarrow P^{-1}Y' = DP^{-1}Y \Leftrightarrow Z' = DZ,$$

en posant $P^{-1}Y = Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$.

Donc on est ramené à résoudre le système équivalent suivant :

$$(L'):\begin{cases} z_1' = 2z_1 \\ z_2' = 3z_2 \\ z_3' = 4z_3 \end{cases}.$$

dont on obtient immédiatement les solutions :

$$Z = \begin{pmatrix} k_1e^{2x} \\ k_2e^{3x} \\ k_3e^{4x} \end{pmatrix}, \ \forall (k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{R}^3.$$

Puisque l'on a $Y = PZ$, on en déduit finalement :

$$Y = \begin{pmatrix} k_1e^{2x} + k_2e^{3x} + k_3e^{4x} \\ k_1e^{2x} + k_2e^{3x} \\ k_1e^{2x} + 2k_2e^{3x} + k_3e^{4x} \end{pmatrix}, \ \forall (k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{R}^3$$

Exercice 2

1. Soit $I = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\ln(1-x)}{x}\,\mathrm{d}x$.

a. La fonction $f : x \mapsto -\dfrac{\ln(1-x)}{x}$ est définie, continue, dérivable sur $D_f =]-\infty, 0[\cup]0,1[$ et prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$ car :

$$f(x) \underset{0}{\sim} -\frac{-x}{x} = 1.$$

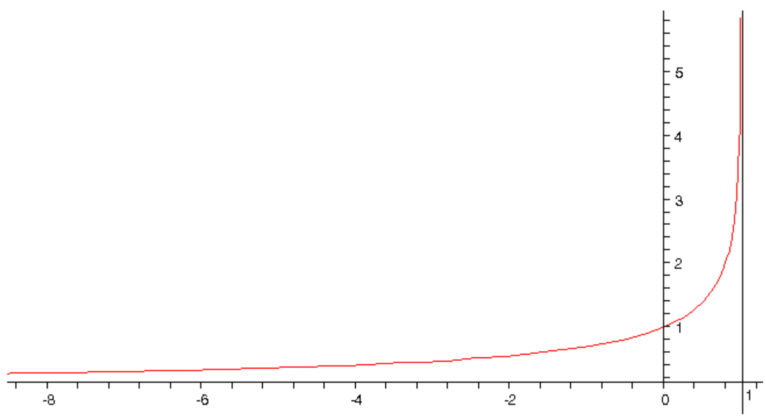
Pour tout $x \in D_f$ on a :

$$f'(x) = \frac{\ln(1-x)}{x^2} + \frac{1}{x(1-x)} = \frac{(1-x)\ln(1-x)+x}{x(1-x)}.$$

En posant $g(x) = (1-x)\ln(1-x) + x$, on obtient $g'(x) = -\ln(1-x) \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 0$, et $g(0) = 0$.
On en déduit alors que $g(x) \geqslant 0$ sur D_f, et donc que f est croissante.
On détermine ensuite les limites aux bornes de D_f et on obtient :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 1} f(x) = +\infty.$$

On en déduit l'allure de son graphe :



b. La fonction f étant continue sur $[-1, 0[$ et sur $]0, 1[$, elle est localement intégrable sur ces intervalles. Nous avons vu, de plus, qu'elle était positive et prolongeable par continuité en 0, ce qui nous donne déjà la convergence de l'intégrale J.

Pour l'étude de K, on a la convergence en 0 par prolongement par continuité.

En 1, on considère $K_1 = \displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)\mathrm{d}x$ et on effectue le changement de variable bijectif $t = 1-x$;

K_1 est alors de même nature que $K_2 = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} -\frac{\ln t}{1-t}\mathrm{d}t$.

En 0, on a : $-\dfrac{\ln t}{1-t} \underset{0}{\sim} -\ln t$ qui est positif sur $\left]0, \dfrac{1}{2}\right]$ et $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} -\ln t\ dt$ converge. On en déduit, par comparaison, que K_2 converge, puis grâce au théorème de changement de variable que K_1 converge. Finalement, K converge.

2. Etude de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} x^n$.

a. Le rayon de convergence de cette série est $R = 1$.

b. Les séries numériques $\sum_{n\geqslant 0} 1^n$ et $\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n$ sont grossièrement divergentes.

c. On obtient alors $F(x) = \dfrac{1}{1-x}$ sur $D_F = \,]-1,1[\,$.

3. Etude de la série entière $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{x^n}{n}$ de somme G.

a. En remarquant que cette série est la série primitive qui s'annule en 0 de la série précédente, on obtient immédiatement $R' = R = 1$ et $G(x) = -\ln(1-x)$, au moins pour $x \in \,]-1,1[\,$.

b. La série numérique $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n}$ est une série de Riemann divergente.

c. Etude de $G(-R') = G(-1)$.

i. Pour $x \in [-1,0]$, on a :

$$\begin{aligned} G_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{k+1}}{k+1} = \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^x t^k \,\mathrm{d}t = \int_0^x \sum_{k=0}^{n-1} t^k \,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^x \frac{1-t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{1}{1-t}\,\mathrm{d}t - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t \\ &= -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

ii. Pour $t \in [-1,0]$, on a $1 \leqslant 1-t \leqslant 2$ et donc $\left|\dfrac{t^n}{1-t}\right| \leqslant |t|^n$.

On obtient alors :

$$\left|\int_{-1}^0 \frac{t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_{-1}^0 \left|\frac{t^n}{1-t}\right|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_{-1}^0 |t^n|\,\mathrm{d}t,$$

et comme on a :

$$\int_{-1}^0 |t^n|\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^0 |t|^n\,\mathrm{d}t \overset{(u=-t)}{=\!=\!=} \int_0^1 u^n\,\mathrm{d}u = \frac{1}{n+1},$$

on en déduit bien que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left|\int_{-1}^0 \frac{t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t\right| = 0$.

iii. Cela implique que l'on a :

$$G_n(-1) = -\ln(2) - \int_0^{-1} \frac{t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t = -\ln(2) + \int_{-1}^0 \frac{t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\ln(2)$$

et donc que $G(-1)$ existe et vaut $-\ln(2)$.

d. De ce qui précède on déduit que la somme G de la série $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{x^n}{n}$ est définie sur $[-1,1[$ par

$G(x) = -\ln(1-x)$.

4. Etude de la série entière $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{x^n}{n^2}$.

a. Le critère de d'Alembert nous donne immédiatement $R'' = 1$.

b. La série numérique $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente et la série $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^n}{n^2}$ est absolument convergente (car son terme général est majoré, en valeur absolue, par celui de la première série), donc convergente.

c. Le domaine de définition de la somme H de cette série est donc $[-1,1]$ et on remarque alors que l'on a, sur l'intervalle ouvert de convergence $]-1,1[$ (où l'on peut dériver terme à terme une série entière) :

$$\left\{\begin{array}{l} H'(x) = \dfrac{G(x)}{x} \quad \text{si} \quad x \neq 0 \\ H(0) = 0 \end{array}\right. \Rightarrow H(x) = \int_0^x \frac{G(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{-\ln(1-t)}{t}\,\mathrm{d}t.$$

5. Etude de la continuité de H en 1 et en -1.

a. Pour tout $x \in [0,1]$, on a :

$$0 \leqslant T_n(x) = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{x^k}{k^2} \right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left| \frac{x^k}{k^2} \right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leqslant \int_n^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n}.$$

b. On en déduit immédiatement que, pour tout $x \in [0,1]$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} |H(1) - H(x)| &= |H_n(1) + T_n(1) - H_n(x) - T_n(x)| \\ &\leqslant |H_n(1) - H_n(x)| + |T_n(1)| + |T_n(x)| \\ &\leqslant |H_n(1) - H_n(x)| + \frac{2}{n}. \end{aligned}$$

c. Soit $\varepsilon > 0$. On considère $N \in \mathbb{N}$ tel que $\dfrac{2}{N} < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

On obtient alors, par la question précédente :

$$|H(1) - H(x)| < |H_N(1) - H_N(x)| + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Or la fonction H_N est continue en 1 en tant que somme finie de fonctions continues, donc on a :

$$\begin{aligned} \exists\, \eta > 0 \;/\; |x-1| < \eta \quad &\Rightarrow \quad |H_N(1) - H_N(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \\ &\Rightarrow \quad |H(1) - H(x)| < \varepsilon. \end{aligned}$$

On obtient ainsi que $|H(1) - H(x)| \xrightarrow[x \to 1]{} 0$, ce qui nous donne la continuité de H en 1.

Une démarche en tout point identique nous donnerait également la continuité en -1.

6. Calcul de I.

a. La continuité de H en 1 nous donne alors $H(1) = -\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

b. On en déduit ainsi que $K = H(1) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

c. On obtient de même $J = H(-1) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$.

On fait alors le calcul suivant :

$$\begin{aligned} J = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \lim_{N \to +\infty} \left(\sum_{n=1}^{2N+1} \frac{(-1)^n}{n^2} \right) &= \lim_{N \to +\infty} \left(\sum_{p=1}^{N} \frac{(-1)^{2p}}{(2p)^2} + \sum_{p=0}^{N} \frac{(-1)^{2p+1}}{(2p+1)^2} \right) \\ &= \lim_{N \to +\infty} \left(\sum_{p=1}^{N} \frac{1}{(2p)^2} - \sum_{p=0}^{N} \frac{1}{(2p+1)^2} \right) \\ &= \lim_{N \to +\infty} \left(\frac{1}{4} \sum_{p=1}^{N} \frac{1}{p^2} - \sum_{p=0}^{N} \frac{1}{(2p+1)^2} \right) \\ \text{car les deux limites existent } \rightarrow \quad &= \lim_{N \to +\infty} \left(\frac{1}{4} \sum_{p=1}^{N} \frac{1}{p^2} \right) - \lim_{N \to +\infty} \left(\sum_{p=0}^{N} \frac{1}{(2p+1)^2} \right) \\ &= \frac{1}{4} \times \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{8} = -\frac{\pi^2}{12} \end{aligned}$$

On en déduit ainsi $I = J + K = \dfrac{\pi^2}{6} - \dfrac{\pi^2}{12} = \dfrac{\pi^2}{12}$.