$\star$ Spé - St Joseph/ICAM Toulouse $\star$ - 2016-2017 -

Math. – ES 2 - S2 – Géométrie

mardi 23 mai 2017 - Durée 3 h

Toutes les réponses seront justifiées. La notation tiendra compte du soin apporté à la rédaction.

Partie I : Deux surfaces

Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ rapporté au repère orthonormé direct $\left(O\,;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k}\right)$, on considère la surface S d'équation cartésienne

$$z = \left(y - 2\sqrt{2}x\right) y$$

ainsi que la surface Σ de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = \sqrt{2}uv \\ y = (u+v)^2 \\ z = \left(u^2 - v^2\right)^2 \end{cases} \quad , \ (u,v) \in \mathbb{R}^2.$$

On note $M\,(u,v)$ le point de Σ de paramètres u et v.

1. *À propos de S.*

a. Quelle est la nature de l'intersection de S avec un plan d'équation $y = \alpha$, où $\alpha \in \mathbb{R}$? Qu'en déduit-on pour S ?

b. Quelle est la nature de l'intersection de S avec un plan d'équation $x = \beta$, où $\beta \in \mathbb{R}$?

c. i. Quelle est la nature de l'intersection Λ_γ de S avec un plan d'équation $z = \gamma$, où $\gamma \in \mathbb{R}$? Distinguer différents cas suivant les valeurs de γ.

ii. On note O_γ le point de coordonnées $(0,0,\gamma)$. Tracer les courbes Λ_γ dans le repère $\left(O_\gamma\,;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$ pour $\gamma \in \{-2,0,1\}$.
On pourra confondre les points O_γ et tracer les 3 courbes dans le même repère.

d. Déterminer une équation cartésienne du plan tangent à S en un point M_0 de S de coordonnées (x_0,y_0,z_0). Cette équation ne devra pas dépendre de z_0.

2. *À propos de Σ.*

a. Vérifier que $\Sigma \subset S$.

b. Déterminer la nature géométrique de l'ensemble des points non réguliers de Σ.

c. Soit $M\,(u,v)$ un point régulier de Σ. Déterminer, en fonction des paramètres u et v, une équation cartésienne du plan tangent à Σ au point $M\,(u,v)$.

Partie II : Etude d'une courbe

On note $A\,(u)$ le point $M\,(u,-2u)$ de Σ et Γ l'ensemble des points $A\,(u)$ lorsque u parcourt $\mathbb{R}_+^*$.

1. Donner une représentation paramétrique de Γ.

T.S.V.P.

2. On considère les vecteurs $\overrightarrow{w} = \frac{1}{3}\overrightarrow{i} + \frac{2}{3}\sqrt{2}\,\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{k}$.

a. Déterminer un vecteur $\overrightarrow{v}$ tel que $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ forme une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$.

b. Écrire la matrice de passage Q_1 de la base $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ à la base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ et la matrice de passage Q_2 de la base $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ à la base $(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u})$.

c. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice Q_2.

d. Déterminer la nature et les éléments caractérisitiques de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice Q_1.

3. Les coordonnées d'un point M dans le repère $\left(O\,;\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ sont (x, y, z) et ses coordonnées dans $(O\,;\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ sont (x', y', z'). Quelle relation existe-t-il entre Q_1, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$?

4. En déduire une représentation paramétrique de Γ dans le repère $(O\,;\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$.
Quelle est la nature de Γ ?

On se place à nouveau dans le repère $\left(O\,;\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$, et on considère le système différentiel

$$\Upsilon : X' = BX \text{ où } B \text{ est la matrice } \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{2\sqrt{2}}{5} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ -\frac{2}{5} & -\frac{4\sqrt{2}}{5} & 2 \end{pmatrix}$$

On appelle courbe intégrale du système différentiel Υ toute courbe dont une représentation paramétrique est $t \in \mathbb{R} \mapsto X(t)$, où X est une solution de Υ.

5. Soit x_0, y_0 et z_0 trois réels donnés. Que peut-on dire du nombre de solutions de Υ vérifiant $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$, $z(0) = z_0$?

6. a. Justifier que B est diagonalisable et la diagonaliser. On donnera une matrice diagonale D semblable à B, la matrice de passage P retenue, ainsi que la relation liant B, P et D (le calcul de P^{-1} n'est pas demandé).

b. En déduire les solutions de Υ.

c. Démontrer que toutes les courbes intégrales de Υ sont planes.

d. La courbe Γ est-elle une courbe intégrale de Υ ?

Fin de l'énoncé de géométrie