- ES-S1 - - 2017-2018 -

– Correction - Algèbre –

Exercice 1

$\chi_A = (X-3)(X-2)$ est scindé sur $\mathbb{R}$ donc A est trigonalisable (au moins) sur $\mathbb{R}$.
On a $E_3(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ et $E_2(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}4\\3\\4\end{pmatrix}\right)$; ce qui fait que A n'est pas diagonalisable.
On cherche alors $P = \begin{pmatrix}1 & 4 & a\\1 & 3 & b\\1 & 4 & c\end{pmatrix}$ telle que $AP = PT$. Cette dernière égalité nous donne un système d'inconnue (a,b,c) dont le triplet $(-2,0,-1)$ est solution.
Donc $A = \begin{pmatrix}1 & 4 & -2\\0 & 6 & -3\\-1 & 4 & 0\end{pmatrix}$ est semblable à la matrice $T = \begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\0 & 2 & 1\\0 & 0 & 2\end{pmatrix}$ avec $P = \begin{pmatrix}1 & 4 & -2\\1 & 3 & 0\\1 & 4 & -1\end{pmatrix}$ puis $P^{-1} = \begin{pmatrix}3 & 4 & -6\\-1 & -1 & 2\\-1 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

Exercice 2

1. Il suffit de poser $\varphi :\ t \mapsto \mathrm{e}^{-t} \in C([0,1],\mathbb{R})$ et F l'ensemble des fonctions affines, sous-espace vectoriel de $C([0,1],\mathbb{R})$.

2. On peut orthonormaliser $(t \mapsto 1, t \mapsto t)$, base de F, en (f,g) puis, le projeté orthogonal de φ sur F est donné par $p_F(\varphi) = (\varphi|f)f + (\varphi|g)g$.
On a alors $f : t \mapsto 1$, $g : t \mapsto \sqrt{12}\left(t - \dfrac{1}{2}\right)$, puis $(\varphi|f) = 1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}}$, $(\varphi|g) = \sqrt{3}\left(1 - \dfrac{3}{\mathrm{e}}\right)$, et enfin
$p_F(\varphi) : t \mapsto \left(6 - \dfrac{18}{\mathrm{e}}\right)t + \dfrac{8}{\mathrm{e}} - 2$.

3. On en déduit $I = d(\varphi,F)^2 = \|\varphi - p_F(\varphi)\|^2 = \|\varphi\|^2 - \|p_F(\varphi)\|^2$. (théorème de Pythagore)
Puis $I = (\varphi|\varphi) - (\varphi|f)^2 - (\varphi|g)^2 = \left(\dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}^2}\right)\right)^2 - \left(1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)^2 - \left(\sqrt{3}\left(1 - \dfrac{3}{\mathrm{e}}\right)\right)^2$, soit encore

$$I = \frac{1 - 114\mathrm{e}^2 + 80\mathrm{e}^3 - 15\mathrm{e}^4}{4\mathrm{e}^4}$$

Exercice 3

Partie 1

1. En résolvant le système d'inconnues U et V formé par les deux premières équations, on trouve $V = \dfrac{\lambda A - A^2}{\mu(\lambda - \mu)}$ et $U = \dfrac{\mu A - A^2}{\lambda(\mu - \lambda)}$.

On substitue V et U dans la troisième relation et on a bien $A^3 = (\lambda + \mu)A^2 - \lambda\mu A$.

2. Démonstration par récurrence double.
L'initialisation est donnée par les deux premières relations.

Soit $p \geq 2$. Supposons la propriété vraie aux rangs $p-1$ et p.

On sait que $A^3 = (\lambda + \mu)A^2 - \lambda\mu A$, donc en multipliant par A^{p-2}, on obtient :
$A^{p+1} = (\lambda + \mu)A^p - \lambda\mu A^{p-1}$.
Puis, $A^{p+1} = (\lambda + \mu)(\lambda^p U + \mu^p V) - \lambda\mu(\lambda^{p-1}U + \mu^{p-1}V) = \lambda^{p+1}U + \mu^{p+1}V$ ce qui établit l'hérédité.

3. a. Puisque f est linéaire,

$$\begin{aligned} x \in \mathrm{Ker}(f) &\iff f(x) = 0 \\ &\implies f^{p-1} \circ f(x) = 0 \\ &\iff f^p(x) = 0 \\ &\iff x \in \mathrm{Ker}(f^p) \end{aligned}$$

b. On sait que $A^{p+1} = (\lambda + \mu)A^p - \lambda\mu A^{p-1}$, et que f est canoniquement associé à A donc $f^{p+1} = (\lambda + \mu)f^p - \lambda\mu f^{p-1}$, ce qui donne $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\lambda\mu f^{p-1}(x) = (\lambda + \mu)f^p(x) - f^{p+1}(x$.

c. Démonstration par récurrence.

Pour $p = 2$, la relation précédente donne $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \lambda\mu f(x) = (\lambda + \mu)f^2(x) - f^3(x)$.
Ainsi, si $x \in \mathrm{Ker}(f^2)$, $f^2(x) = 0$ puis $f^3(x) = 0$ et donc, comme $\lambda\mu \neq 0$, $f(x) = 0$; c'est à dire $x \in \mathrm{Ker}(f)$.
On a donc bien $\mathrm{Ker}(f^2) \subset \mathrm{Ker}(f)$.
Soit $p \geq 2$. Supposons $\mathrm{Ker}(f^p) \subset \mathrm{Ker}(f)$.
Soit alors $x \in \mathrm{Ker}(f^{p+1})$ alors $f^{p+1}(x) = 0$ puis $f^{p+2}(x) = 0$, et comme $\lambda\mu f^p(x) = (\lambda + \mu)f^{p+1}(x) - f^{p+2}(x)$ et que $\lambda\mu \neq 0$, on a $f^p(x) = 0$ et donc $x \in \mathrm{Ker}(f^p) \subset \mathrm{Ker}(f)$. On a donc bien $\mathrm{Ker}(f^{p+1}) \subset \mathrm{Ker}(f)$ et on a l'hérédité.

d. Des questions précédentes, on sort $\mathrm{Ker}(f^p) = \mathrm{Ker}(f)$ et ensuite, on en déduit par le théorème du rang que $\dim(\mathrm{Im}(f^p)) = \dim(\mathrm{Im}(f))$, c'est à dire $\mathrm{rg}(A^p) = \mathrm{rg}(A)$.

Partie 2

1. ${}^tV\ U = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} u_i v_i \in \mathbb{R}$.

2. $(U\ {}^tV)^2 = (U\ {}^tV)(U\ {}^tV) = U\ ({}^tV\ U)\ {}^tV = k(U\ {}^tV)$ où l'on a posé $k = {}^tV\ U$.

$$\begin{aligned} (U\ {}^tV)^2 = k(U\ {}^tV) &\iff & (A - aI_n)^2 = k(A - aI_n) \\ &\iff & A^2 + a^2 I_n - 2aA = kA - kaI_n \\ &\iff & A^2 = (2a + k)A - a(a + k)I_n \end{aligned}$$

On a donc $\alpha = 2a + k$ et $\beta = -a(a + k)$.

3. On a clairement $a_{ij} = \begin{cases} a + u_i v_i & \text{si} \quad i = j \\ u_i v_j & \text{si} \quad i \neq j \end{cases}$

$\mathrm{Tr}(A) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \sum_{i=1}^{n}(a + u_i v_i) = \sum_{i=1}^{n} a + \sum_{i=1}^{n} u_i v_i = na + {}^tV\ U$.

4. On a alors $\alpha = 2a + k = 2a + \mathrm{Tr}(A) - na = (2-n)a + \mathrm{Tr}(A)$
et $\beta = -a(a + \mathrm{Tr}(A) - na) = (n-1)a^2 - a\mathrm{Tr}(A)$.

5. λ valeur propre de A donc $\exists X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $AX = \lambda X$. Ainsi $A^2X = A(AX) = A(\lambda X) = \lambda(AX) = \lambda^2 X$ et, comme $X \neq 0$, λ^2 est valeur propre de A^2. Soit X un vecteur propre associé à la valeur propre λ. On a

$A^2 = \alpha A + \beta \mathrm{I}_n$ donc $A^2X = \alpha AX + \beta \mathrm{I}_n X$, c'est-à-dire $\lambda^2 X = \alpha\lambda X + \beta X$, ou encore $(\lambda^2 - \alpha\lambda - \beta)X = 0$; on conclut que $\lambda^2 - \alpha\lambda - \beta = 0$, puisque $X \neq 0$.

6. On cherche λ_1 et λ_2 tels que $\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 & = \alpha = (2-n)a + \mathrm{Tr}(A) \\ \lambda_1\lambda_2 & = -\beta = -(n-1)a^2 + a\mathrm{Tr}(A) \end{cases}$ et clairement
$\lambda_1 = a$ et $\lambda_2 = \mathrm{Tr}(A) - (n-1)a$ conviennent et sont les seules possibles.

7. a. E_1 et E_2 sont les sous-espaces propres de A associés aux valeurs propres λ_1 et λ_2. Ils sont en somme directe si $\lambda_1 \neq \lambda_2$.
Or

$$\begin{aligned} \lambda_1 = \lambda_2 &\iff \mathrm{Tr}(1) - na = 0 \\ &\iff {}^tV\,U = 0 \end{aligned}$$

ce qui est impossible puisque ${}^tV\,U = \mathrm{Tr}({}^tV\,U) = \mathrm{Tr}(U\,{}^tV) \neq 0$. On conclut que $E_1 \cap E_2 = \{0\}$.

b. On cherche X_1 et X_2 tels que $\begin{cases} X = X_1 + X_2 \\ AX_1 = \lambda_1 X_1 \\ AX_2 = \lambda_2 X_2 \end{cases}$.

On obtient $\begin{cases} X = X_1 + X_2 \\ AX = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 \end{cases}$ puis $\begin{cases} X_1 = \dfrac{\lambda_2 X - AX}{\lambda_2 - \lambda_1} \\ X_2 = \dfrac{\lambda_1 X - AX}{\lambda_1 - \lambda_2} \end{cases}$. Ce qui achève l'analyse.

Enfin, on vérifie que ces deux valeurs répondent à la question et donne la synthèse.

c. Les deux questions précédentes nous permettent de conclure que $M_{n,1}(\mathbb{R}) = E_1 \oplus E_2$ qui est une condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité de A.