Math. - ES 1 - S1 - Analyse

jeudi 11 janvier 2018 - Durée 3 h

Toutes les réponses seront justifiées. La notation tiendra compte du soin apporté à la rédaction.

Exercice 1

On considère l'équation différentielle

$$(H):\ x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0$$

1. Rechercher une solution de (H) sur $]0,1[$, développable en série entière.
On donnera une forme explicite de cette solution.

2. Résoudre (H) sur $]0,1[$.

Exercice 2

On rappelle la valeur de l'intégrale de Gauss :

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

On considère la fonction

$$G : x \mapsto \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^x \mathrm{d}t$$

1. Montrer que G est définie sur $[0,+\infty[$.

2. Calculer $G(0)$ et $G\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

3. Montrer que pour tout $x \in [0,+\infty[$, $G(x+1) = (x+1)G(x)$.

4. Calculer $G(n)$, pour tout entier n.

Exercice 3

On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \mathrm{e}^{-x^2}\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t$$

1. Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$.

T.S.V.P.

2. Montrer que F est développable en série entière.

3. Montrer que F est solution, sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle :

$$(L) : \; y' = -2xy + 1$$

4. En recherchant le développement en série entière de F sous la forme $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, donner une relation de récurrence vérifiée par $a_n, n \geq 1$.

5. En déduire que le développement en série entière de F est :

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n 4^n n!}{(2n+1)!} x^{2n+1},$$

et en donner son rayon de convergence.

6. Donner le développement en série entière de la fonction

$$x \mapsto \int_0^x \mathrm{e}^{t^2} \mathrm{d}t$$

7. Déduire de ce qui précède que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} \binom{n}{k} = \frac{4^n}{(2n+1)\binom{2n}{n}}$$

Fin de l'énoncé d'analyse